

ЭТО номера билетов, а не страниц (справа внизу) места

Экзаменационные вопросы к курсу "Методы оптимизации",
лектор: д.ф.-м.н. проф. Новикова Н.М.

БИЛЕТ 1.

1. Определения: индивидуальной и массовой задачи, кодировки задачи, алгоритма решения массовой задачи, временной сложности алгоритма.
2. Формула градиентного метода в задаче безусловной минимизации.

БИЛЕТ 2.

1. Задачи распознавания свойств. Классы P и NP.
2. Формула метода Ньютона в задаче безусловной минимизации.

БИЛЕТ 3.

1. Теорема об экспоненциальной временной оценке для задач из класса NP.

2. Идея метода штрафов. — уточнить как делить, но дописать

БИЛЕТ 4.

1. Определение полиномиальной сводимости. Класс NPC.

Теорема Кука /без док-ва/.

2. Геометрическое описание симплекс-метода.

БИЛЕТ 5.

1. Критерий NP-полноты. Док-во NP-полноты задачи БЛН.

2. Методы глобальной минимизации.

БИЛЕТ 6.

1. Док-во NP-полноты задачи 3-выполнимости. NP-трудные задачи.

2. Формула градиентного метода в задаче безусловной минимизации.

БИЛЕТ 7.

1. Класс co-NP. Пример задачи, допускающей хорошую характеристику.

Доказательство утверждения о взаимоотношении классов NPC и co-NP.

2. Формула метода Ньютона в задаче безусловной минимизации.

БИЛЕТ 8.

1. Взаимоотношение классов P, NP и NPC, NP и co-NP. Класс PSPACE.

2. Полиномиальный алгоритм округления ϵ -приближенного решения системы линейных неравенств.

БИЛЕТ 9.

1. Псевдополиномиальные алгоритмы. Пример для задачи о рюкзаке.

2. Идея метода эллипсоидов. — неясно 6

БИЛЕТ 10.

1. Сильная NP-полнота. Теорема о связи сильной NP-полноты задачи с существованием псевдополиномиального алгоритма ее решения.

2. Идея метода штрафов.

БИЛЕТ 11.

1. Определение комбинаторной задачи оптимизации и приближенного алгоритма ее решения. Утверждение о разнице между приближенным и точным оптимумом для задачи о рюкзаке.
2. Идея метода Ньютона. см(28)

БИЛЕТ 12.

1. Определение ϵ -приближенного алгоритма и полностью полиномиальной приближенной схемы /ПППС/. Связь между существованием ПППС и псевдополиномиальностью.
2. Теорема оптимальности для разложимых функций.

БИЛЕТ 13.

1. Теорема об отсутствии ПППС для задач оптимизации, соответствующих сильно NP-полным задачам распознавания.

2. Геометрическая идея симплекс-метода.

Лекции:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13

линейное
квadratic

уточнить

him(K) кг

$$P_1 = \emptyset, B_1 = B_1$$

$$KM_{P_1} = \{I \in KM \mid B \leq P(m)\}$$

все P-мно NPC

$\exists P_1$ - замкн?

~~25-77~~

БИЛЕТ 14.

- (13) 1. Определение озЛП. Принцип граничных решений. Алгебраическая и битовая сложность ЛП. Результаты о сложности для задач, близких к ЛП.
(39) 2. Идея метода ветвей и границ. Пример для задачи БЛП.

БИЛЕТ 15.

- (15) 1. Теорема о границах решений задач ЛП с целыми коэффициентами.
(38) 2. Метод ветвей и границ для ЦЛП. Различные стратегии метода.

БИЛЕТ 16.

- (16) 1. Теорема о мере несовместности систем линейных неравенств с целыми коэффициентами.
(31) 2. Метод ветвей и границ для глобальной минимизации липшицевых функций. см (31)

БИЛЕТ 17.

- (17) 1. Следствия систем линейных неравенств. Афинная лемма Фаркаша /без док-ва/.
(2) 2. Понятие о временной сложности алгоритмов.

БИЛЕТ 18.

- (18) 1. Лемма Фаркаша о неразрешимости.
(3) 2. Понятие о недетерминированно полиномиальных задачах.

БИЛЕТ 19.

- (18) 1. Теорема двойственности ЛП.
(14) 2. Метод динамического программирования для БЛП с неотрицательными коэффициентами.

БИЛЕТ 20.

- (20) 1. Сведение озЛП к однородной системе уравнений с ограничением $x \geq 0$, x не 0.
(41) 2. Применение метода динамического программирования для понижения размерности разложимой оптимизационной задачи.

БИЛЕТ 21.

- (21) 1. Классификация задач математического программирования. Преимущества выпуклого случая.
(33) 2. Полиномиальный алгоритм округления ϵ_1 -приближенного решения системы линейных неравенств.

БИЛЕТ 22.

- (22) 1. Необходимые условия локального минимума при ограничениях-неравенствах для дифференцируемых функций.
(37) 2. Идея метода Кармаркара.

БИЛЕТ 23.

- (24) 1. Понятие о регулярности ограничений-неравенств в задаче математического программирования.
(3) 2. Описание метода эллипсоидов.

БИЛЕТ 24.

- (26) 1. Теорема о целочисленности решения задачи ЛП с целыми коэффициентами для вполне унимодулярных матриц ограничений.
(36) 2. Оценка сложности метода эллипсоидов поиска ϵ_2 -приближенного решения озЛП.

Те, кому не были зачтены домашние задания, получают вместе с билетом еще и задачу из учебника

Кроме того, обязательно надо уметь:

привести примеры на принадлежность задачи к конкретному классу сложности, построить двойственную задачу к задаче ЛП, заданной в произвольной форме, и выписать формулы градиентного метода и метода Ньютона для задачи оптимизации.

Лекции можно взять по адресу: <http://www.ccas.ru/depart/malashen/53kmsu.htm>

Удачи на экзамене! Предмет классный :)

Михаильцев
Анатолий,
2022

Методы оптимизации.

1.1. Определены: миним. и макс. задачи, кодировка задачи, алгоритма решения массовой задачи, временная сложность алгоритма

Опр. Массовая задача, или проблема Π определяется:

1. Будем считать всех параметров задачи (свободных параметров, значения которых не заданы)
2. Формулировкой свойств, которыми должен удовлетворять ответ. (решение задачи).

Опр. Индивидуальная задача $I \in \Pi$ - задача, получаемая из Π подстановкой конкретных значений параметров.

Опр. Алгоритм A решает массовую задачу Π , если

$\forall I \in \Pi \rightarrow A$ принимает $K I$ (т.е. останавливается) и за конечное число шагов

$\forall I \in \Pi \rightarrow A$ даёт решение задачи I .

Введем обозначения: алфавит $\Sigma = \{\sigma_i\}$ - конечное мн-во,
 Σ^* - мн-во слов над алфавитом Σ - произвольных
 конечных последовательностей, составленных из
 возможно повторяющихся символов алфавита: $\tilde{\sigma} = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_n}$,
 $\sigma_{i_j} \in \Sigma \forall i_j$. В т.ч. $\tilde{\sigma}$ н.д. путем слова; Число n -
 длина слова $\tilde{\sigma}$: $n = |\tilde{\sigma}|$. Тогда

Опр. Кодировочной задачи Π назовем такое отображе-
 ние $e: \Pi \rightarrow \Sigma^*$, ставящее в соответствие $\forall I \in \Pi$ её
 код $e(I) = \tilde{\sigma} \in \Sigma^*$ (слово из алфавита Σ^*), что
 1 возможно однозначное декодирование:

$$\forall I_1 \neq I_2 \hookrightarrow e(I_1) \neq e(I_2)$$

2. e, e^{-1} полиномиально вычислимы: $\exists$ Алгоритм,
 реализующий e, e^{-1} , и полином $P(\cdot)$, для которого $\forall I \in \Pi$
 время определения $e(I)$ и $e^{-1}(e(I))$ не превосходит $P(|e(I)|)$
 3. кодировка без избыточности: $\forall$ другой кодировкой e' ,

удовлетворяющей первым двум условиям, $\exists P'(\cdot)$, т.ч.
 $\forall I \in \Pi \rightarrow |e(I)| < P'(|e'(I)|)$.
 Пример: $\forall K$ -иная СС, $K > 1$,
 явл. невыгодной для записи
 целых чисел.

Пример: задача коммивояжера: найти минимальный маршрут обхода упорядоченных объектов (городов) с возвращением в начальную точку. Для П коммивояжера введем

1. Входные параметры: число городов m или мн-во

городов $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ и набор расстояний между ними:

$$\{d(c_i, c_j) > 0 : c_i, c_j \in C, i \neq j\}$$

2. Требования к решению: $[c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(m)}]$ маршрут

$$\min_{\pi} \left[\sum_{i=1}^{m-1} d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) + d(c_{\pi(m)}, c_{\pi(1)}) \right],$$

где $\min$ берётся по возможным перестановкам

π на мн-ве индексов городов.

Приведем пример I-мн-ва городов: пусть $m=4$,

тогда опт. маршрут оказывается $\downarrow$ i, j заданы таблицей

$[c_1, c_2, c_4, c_3]$, реал. путь мин длины - 27.

	c_1	c_2	c_3	c_4
c_1		10	5	9
c_2	10		6	9
c_3	5	6		3
c_4	9	9	3	

(2)

Опр. Алгоритм A решает задачу Π с погрешностью ε , если $L(A) = L(\Pi, \varepsilon)$ и $\forall \tilde{\sigma} \in \Sigma^* \rightarrow A$ останавливается (для задачи распознавания в-в).

Пусть $t_A(\tilde{\sigma})$ — время работы алгоритма A на входе $\tilde{\sigma} \in \Sigma^*$ (число шагов до остановки)

Опр Временной сложностью A решаемой задачи Π назовём ф-ю $T_A(\cdot)$, определенную как:

$$T_A(n) = \max_{\tilde{\sigma} \in \Sigma^* : |\tilde{\sigma}| \leq n} t_A(\tilde{\sigma}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

2.1. Задачи распознавания свойств. Классы P и NP .

Задача распознавания св-в — это массовая задача, предполагающая ответ "да" или "нет". В качестве решения.

Полем-во мн-ва индивидуальных задач, интересующих ответ "да" будем обозначать Y

Мн-во всех возможных значений параметров Π будем обозначать D . Тогда набор $\{D(\Pi), Y(\Pi)\}$ полностью характеризует св-во P рас-я св-в.

Пример: задача коммивояжера в пост-ке рас-я св-в: КМ: существует ли маршрут длины не больше B ?

Опр. Класс полиномиально разрешимых задач (распознавание свойств)

$$P = \{L(\Pi, e) \mid \exists A, \text{ решающая } \Pi \text{ за время } e, \\ \exists P(\cdot): T_A(n) < P(n) \forall n \in \mathbb{Z}_+\}$$

$$\text{поиск}$$

Опр $HDNT \hat{A}$ — набор $DNT A(S) \subset \text{алфавит } \Sigma$, где $S \in \Sigma^*$:

$$\hat{A} = \{A(S) \mid S \in \Sigma^*\}$$

$\hat{A}$ останавливается, когда она первая из $A(S)$, получ. на входе $\tilde{\sigma}$.

$$\hat{L}(\hat{A}) = \{ \tilde{\sigma} \in \Sigma^* \mid \exists S \in \Sigma^* : \tilde{\sigma} \in L(A(S)) \}$$

S можно интерпретировать как программу к решению, тогда $\hat{A}$ проверяет где $\tilde{\sigma}$ все возможные программы.

$\hat{A}$ может либо остановиться в q_y , либо не остановиться (в силу ∞ кон-ва программ)

Опр. ЯДМТ A решает массивно задачу Π с код-м e , если $L(\Pi, e) = \hat{L}(\hat{A})$.

Опр. время работы ЯДМТ $\hat{A}$ на входе $\tilde{\sigma}$: $\hat{t}_{\hat{A}}(\tilde{\sigma}) = \min_{S: \tilde{\sigma} \in L_{A(S)}} \{ |S| + t_{A(S)}(\tilde{\sigma}) \}$

Опр. Временной сложностью $\hat{A}$ назовем

$$\hat{T}_{\hat{A}}(n) := \max_{\tilde{\sigma} \in \hat{L}(\hat{A}) : |\tilde{\sigma}| < n} \hat{t}_{\hat{A}}(\tilde{\sigma}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Опр. Класс неограниченно полиноми-х задач $NP := \{ L(\Pi, e) \mid \exists \hat{A} - \text{ЯДМТ, реш. } \Pi \text{ с код-м } e, \exists P(\cdot) : \hat{T}_{\hat{A}}(n) < P(n) \forall n \in \mathbb{Z}_+ \}$. Подут $\Pi \in NP$.

Пример: КМ, S-маршрут

3.1. Теорема об экспоненциальной временной оценке для задач из NP.

⑦ $\forall$ недетерминированно полиномиальной задачи $\in$ DMT, решающая её $\in$ экспоненциальной временной сложности, т.е. $\forall \Pi \in NP \exists P(\cdot), \text{ DMT } A: \begin{cases} A \text{ решает } \Pi \\ T_A(n) < 2^{P(n)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$

► т.к. $\Pi \in NP$, то $\forall \sigma \in L(\Pi, e) \exists$ правильная подсказка S полином. длины: $|S| < p_1(|\sigma|)$; $\exists$ DMT $A(S): t_{A(S)}(\sigma) < p_2(|\sigma|)$.

Суть DMT A : берем все $S \in \Sigma^*$ длины меньше, чем $p_1(|\sigma|) \rightarrow$ берем соотв. S DMT $A(S)$. Делаем на $\forall$ такой DMT не более $p_2(|\sigma|)$ шагов. Если хотя бы одна DMT остановится в 9, то ответ да, иначе — нет.

Число шагов DMT A меньше $p_2(|\sigma|) \cdot \underbrace{|\Sigma|^{p_1(|\sigma|)}}_{\text{число проверяемых } S \text{ групп } < p_1(|\sigma|)}$ 

4.1. Определение полиномиальной сложности. Класс NPC.

Теорема Куна (без док-ва).

Опр. Масовая задача распознавания Π' с кодировкой e' полиномиально сводится к Π с к-т e , если $\forall I' \in \Pi'$ можно быть сведена за полиномиальное от её длины время к некоторой $I \in \Pi$ с сохранением ответа, т.е. 1) существует Ф-я сложности $f: e'(\mathcal{D}(\Pi')) \rightarrow$

$\rightarrow e(\mathcal{D}(\Pi))$, т.ч. $f(e'(Y(\Pi'))) = e(Y(\Pi))$,
($\forall \sigma' \in e'(Y(\Pi'))$ ответ da , $\forall \sigma'' \in e'(\mathcal{D}(\Pi') \setminus Y(\Pi'))$ ответ $нет$).

2) $\exists$ ФНТ A_f , реализующая f за полиномиальное время, т.е. $\exists p_f(\cdot): \forall \sigma' \in e'(\mathcal{D}(\Pi')) \hookrightarrow t_{A_f}(\sigma') \leq p_f(|\sigma'|)$.

При ~~использовании~~ использовании канонических кодировок можно опустить кодировку и писать просто $\Pi' \propto \Pi$.

Опр. Масовая задача Π н-я NP-полной (универсальной), если $\Pi \in NP$ и $\forall \Pi' \in NP \hookrightarrow \Pi' \propto \Pi$.

Класс NP-полных задач (расп. в-б) обозначается NPC (NP-complete)

Задача о выполнимости: ВБП: $\exists$ ли выполнимый набор z^0 гл. гами $KHP(z) = \bigwedge_{j=1}^N D_j(z)$,

вход: $A = \{a_{ij}^j\}_{i=1, n}^{j=1, N}$

гл. $D_j(z) = z_1^{a_{1j}^j} \vee \dots \vee z_n^{a_{nj}^j}$,

$z_i^{a_{ij}^j} = \begin{cases} z_i, & a_{ij}^j = 1 \\ \bar{z}_i = \neg z_i, & a_{ij}^j = -1 \\ 0, & a_{ij}^j = 0 \end{cases}$

гл. $n \cdot N \cdot 3$
вход

Т. Бука: ВБП $\in NPC$

ВБП $\in NP$: в качестве подсказки возьмем выполнимый набор.

5.1. Критерии NP-полноты. Док. во NP-полноте БЛН.

Утв. Отношение полноты. Водимости транзитивно:

$$\text{если } \begin{cases} \Pi_1 \propto \Pi_2 \\ \Pi_2 \propto \Pi_3 \end{cases}, \text{ то } \Pi_1 \propto \Pi_3.$$

Отсюда следует

① Критерии NP-полноты: Масовая задача РАЕН св-в

$$\Pi \in NPC \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi \in NP \\ \exists \Pi' \in NPC: \Pi' \propto \Pi. \end{cases}$$

Задача БЛН:
$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \dots + a_{mn}z_n \leq b_m \end{cases}$$

$\exists z \in B^n$ явл. решением? этой системы линейных неравенств

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$

Утв. БЛН $\in NPC$

► 1. БЛН $\in NP$: Пусть $S = z^0$, тогда проверяем полиномиально. (и затем подставим полиномиально, т.к. это константа из n $z_i \in \{0,1\}$)

2. $ВЫП \propto БЛН$:

$$K(z) = \bigwedge_{j=1}^N (z_1^{\alpha_1^j} \vee \dots \vee z_n^{\alpha_n^j}) = 1$$

$\alpha \rightarrow \begin{cases} \dots \\ z_i \rightarrow z_i \\ \bar{z}_i \rightarrow (1 - z_i) \\ 0, \alpha = 0 \end{cases}$

$z_j^\alpha = \begin{cases} z_j, \alpha = 1 \\ \bar{z}_j, \alpha = -1 \\ 0, \alpha = 0 \end{cases}$

$\bullet z_1 \rightarrow " \geq 1 "$

6.1. Док-во NP-полноты задачи 3-ВЫП. NP-трудные задачи.

3-ВЫП — частный случай задачи ВЫП, когда в КНФ могут входить лишь булевы функции трёх переменных.

3-ВЫП $\propto$ ВЫП, т.к. $D(3\text{-ВЫП}) \subset D(\text{ВЫП})$ — это частный случай.

Докажем, что $\text{ВЫП} \propto 3\text{-ВЫП} (\Rightarrow 3\text{-ВЫП} \in \text{NPC})$

Покажем, что произв. булевы ф-ии можно представить в виде конъюнкции булевых ф-ий от 3 переменных. (сделаем это с помощью введения новых переменных u)

$$D_j(z) = \bigwedge_{j'} D_{j'}^i(z, u)$$

$$f^j(z_i | i=1..k)$$

кон-во переменных, присутств. в f^j

Обозначим за y_i переменную z_{j_i} или $\bar{z}_{j_i}$, в з-ти от того, что u_j или $\bar{u}_j$ входят в f^j .

Тогда $f^j = y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_k$. Рассмотрим случаи:

1) $k=1 \rightarrow f^j = y_1$. Введем u_1^j и u_2^j . Тогда получ

$$f^j = (y_1 \vee u_1^j \vee u_2^j)(y_1 \vee \bar{u}_1^j \vee u_2^j)(y_1 \vee u_1^j \vee \bar{u}_2^j)(y_1 \vee \bar{u}_1^j \vee \bar{u}_2^j)$$

2) $k=2 \rightarrow f^j = y_1 \vee y_2$. Введем u_1^j . Тогда получ

$$f^j = (y_1 \vee y_2 \vee u_1^j)(y_1 \vee y_2 \vee \bar{u}_1^j)$$

В первых двух случаях f^j и f'^j принимают один и то же значение при $\forall$ наборе $y_1, (y_1, y_2)$, переменные u_1^j и u_2^j независимы, заменим f^j на f'^j эквивалентно.

3) $k=3$. Тогда $f'^j = f^j$

4) $k>3$. Введем $u_1^j, \dots, u_{k-3}^j$. Пусть

$$f'^j = (y_1 \vee y_2 \vee u_1^j)(y_3 \vee \bar{u}_1^j \vee u_2^j)(y_4 \vee \bar{u}_2^j \vee u_3^j) \dots$$

$$\dots (y_{k-2} \vee \bar{u}_{k-4}^j \vee u_{k-3}^j)(y_{k-1} \vee y_k \vee \bar{u}_{k-3}^j)$$

$$f^j = y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_k$$

Однако, заметим что

Данная замена уже не является эквивалентной. Если $f^j = 0$, то $y_i = 0 \rightarrow f'^j = (u_1^j)(\bar{u}_1^j \vee u_2^j)(\bar{u}_2^j \vee u_3^j) \dots (\bar{u}_{k-3}^j) = 0$

$\forall$ набора u , а если $f^j = 1 \rightarrow \exists i: y_i = 1 \rightarrow$ возьмем

u_m , наход. в той же функции: $\begin{cases} m \neq k-3 \rightarrow \text{пусть } u_m^j = 0, \text{ все} \\ m = k-3 \rightarrow \text{пусть } u_m^j = 0, \end{cases}$

Из замечания следует, что ответ на вопрос "Есть ли набор u , сохраняющийся?"

Опре. Класс NP-трудных задач (NP-hard) содержит:
 1) Π расп. св-в, где показано, что $\Pi' \leq \Pi$ где $\Pi' \in \text{NPC}$,
 но не показано, что $\Pi \in \text{NP}$

2) Потенциально, где пот. св-в Π расп. св-в является
 NP-полным. (например, $\text{KM}_{\text{опт}}$, $\text{БЛН}_{\text{опт}}$ - найти max ф-ции при заданных огр , БЛП - найти max $\langle x, y \rangle$ при мин. огр .)

3) Массовые задачи (не без. расп. св-в), к которым сводятся
 по Теореме какое-либо NPC задачи, где св-в по Теореме $\Pi' \leq \Pi$
 означает, что из $\exists$ полином. Алг. реш. $\Pi \Rightarrow \exists$ полином. Алг. где Π' .
 (в общей полином св-в нет гарантией решения)

Д-во гмб. о взаимном интересе NPC и co-NP.

Получил из Π заменой альтернативного вопроса,
опред-но ответ, на его отрицание. $D(\bar{n}) = D(n)$
 $Y(\bar{n}) = D(n) \setminus Y(n)$.

$$y_{\text{тв. } \omega\text{-}P} = \{\bar{n} \mid n \in P\} = P$$

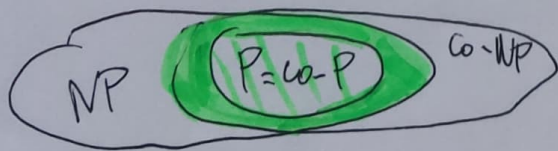
► поперечный срез $\bar{A}$ по A , поперечный срез A по A .

$$\text{co-NP} = \{ \overline{\Pi} \mid \Pi \in \text{NP} \}$$

Пример: $C4 \in NP$, $\neg C4 \in co-NP$, т.е. $\overline{C4} \in NP$

Дир. Маловая задачи распознавание войсков Н-д

Упр. Иерархия сложности характеризуется, если $P \in (NP \cap co-NP)$
Упр. $P \subseteq NP \cap co-NP \rightarrow$ где задан с х.х. можно установить на $\exists$ пол. Алг.



Пример задания, ин.ХХ: ПУ

Упр. 6. Если для некоторого $\Pi \in NPC \rightarrow \bar{\Pi} \in NP$, то

$$NP = co-NP$$

► Так. $\Pi \in NPC$, то $\forall \Pi' \in NP \rightarrow \Pi' \leq \Pi \Rightarrow \exists \Phi$ -я сводимость, сводящая $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\Pi}' \leq \bar{\Pi} (\in NP) \Rightarrow \bar{\Pi}' \in NP.$$

сводим $\forall \Pi' \in NP$ к некоторому $\Pi \in NP$:

$\Rightarrow$ получим, что $\forall \Pi' \in NP$

$A' = A \circ A_f$ — сводим через A_f переводим на язык Π , затем применим Π для этой задачи.

$\bar{\Pi}'$ сводим. св-я к NP -задаче



$$co-NP \subseteq NP$$

В обратную сторону: $\Pi = \bar{\bar{\Pi}}$ — $\forall \Pi \in NP$ сводим к $\bar{\bar{\Pi}} \in NP$

$$co-NP \supseteq NP$$

↑
из того что выше

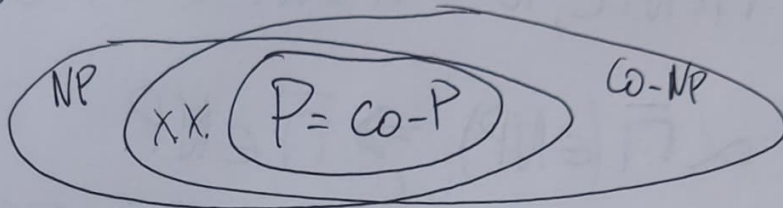
$$co-NP = NP \quad \blacksquare$$

8.1. Взаимовключения классов $P, NP, NPC; NP \cap co-NP, PSPACE$

Утв. $P \subseteq NP$ (пусть все ДИТ односторонние и не зависят от S
 На $b \in L(N, e)$ ДИТ останавливается в $q_1 \rightarrow$ ДИТ ~~останавливается~~ ~~продолжает~~)

$NPC \subseteq NP$ по определению

$P \neq NP$



$NP \neq co-NP$

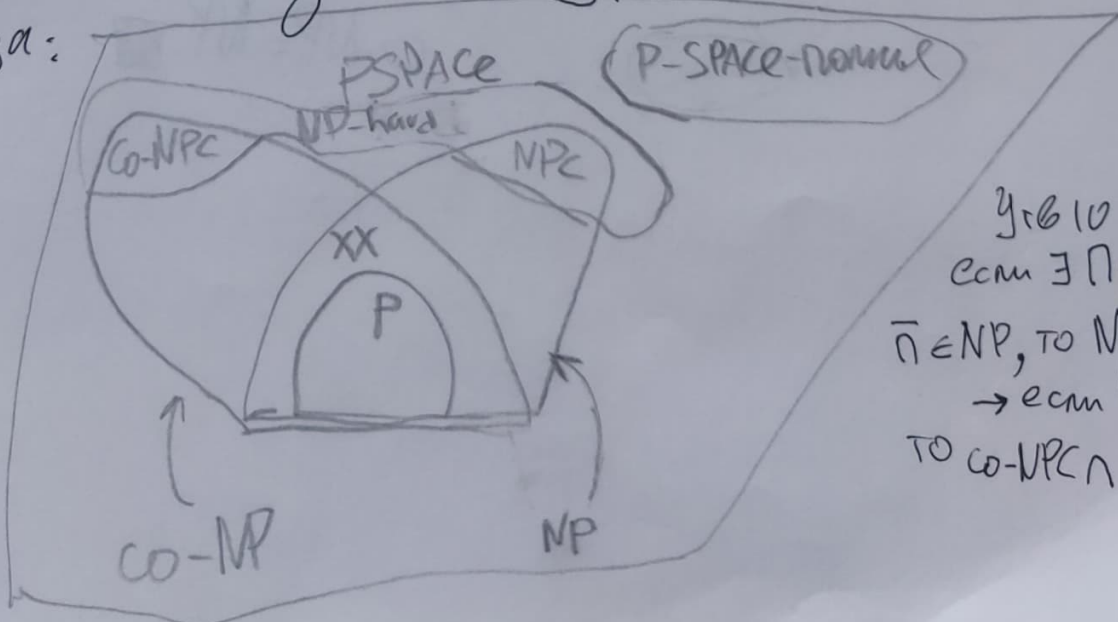
— обратная гипотеза, что $P = NP \cap co-NP$

Другой класс задач $PSPACE$ — задачи (необяз. расч. в б), где решение которых $\exists$ алгоритмы, требующие не более чем полиномиальной памяти

$P \neq PSPACE$

обрат. гипотеза: $P \subseteq PSPACE$

Гипотеза:



Утв 10:
 Если $\exists \Pi \in NPC$, т.е.
 $\Pi \in NP$, то $NP = co-NP$
 $\rightarrow$ если $NP \neq co-NP$,
 то $co-NP \cap NP = \emptyset$.

9.1. Псевдополиномиальные алгоритмы. Пример для ЗР

Опр. Пусть $\text{num}(I)$ - максимальное по модулю целое число (или 0), фигурирующее при задании числовых параметров для индивидуальной задачи I . Пусть $|I| = |e(I)|$ - длина записи I . Алгоритм A решает задачу Π (всп. в. в.) и-е псевдополиномиальным, если $\exists P(\cdot, \cdot)$ т.ч. $\forall I \in \Pi \hookrightarrow$

$$t_A(e(I)) < P(|I|, \text{num}(I))$$

Примером псевдополином. Алг. явл-ся Алгоритм ДП для ЗР.

Задача о Рюкзаке: из некоторой набора полезных вещей нужно набрать Рюкзак ограниченного объёма с наибольшей полезн.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ЗР}_{\text{всп. в. в.}}: \exists \text{ т.ч. } z \in B^n, \sum_{j=1}^n c_j z_j \geq B, \\ \sum_{j=1}^n w_j z_j \leq K \end{array} \right\} \text{ЗР}_{\text{опт}}: \text{НАЙТИ } \max_{z \in B^n} \left\{ \sum_{j=1}^n c_j z_j \mid \sum_{j=1}^n w_j z_j \leq K \right\},$$

Масштаб (случай БЛН)

где $c_j \in \mathbb{Z}_+$ - полезность/ценность, w_j - объём/вес j -той вещи.

$z = \{z_j \in \{0, 1\} \mid j = \overline{1..n}\}$, z_j определяет решение о включении j -той вещи в Рюкзак. $K \in \mathbb{Z}_+$ - максимально возможный объём/вес

Метод АП для ЗР: произвольная $I \in \text{ЗР}$ погружается в семейство задач

$$F_i(E) := \max_{z \in B^n} \left\{ \sum_{j=i}^n c_j z_j \mid \sum_{j=i}^n w_j z_j \leq K - E \right\},$$

Предположим, что мы уже рассмотрели все вещи от 1 до $i-1$. Набрать вес E . НАЙТИ max оставшейся части (9)

$$F_1(0) = \text{ответ для } I.$$

Все задачи данной семейства решаются по рекуррентным

формулам, где i убывает $\leq n$ до 1:

Положим $F_i(E) = 0 \quad \forall E \geq K, \forall i$

$$F_n(E) = \begin{cases} 0, & E > K - w_n, \\ C_n \text{ иначе} \end{cases} \quad \leftarrow \quad \forall E = \overline{0, K-1}$$

можно
или берем последнюю
вещь, или не берем.
↓
не берем.

$\forall i = n-1, \dots, 2$ — идем с конца:

$$F_i(E) = \max \{ F_{i+1}(E), C_i + F_{i+1}(E + w_i) \} =$$

можно
берем
 i -ую
вещь,
или нет

$$= \max_{z_i \in \{0,1\}} \{ C_i z_i + F_{i+1}(E + w_i z_i) \}$$

$$F_1(0) = \max \{ F_2(0), C_1 + F_2(w_1) \}.$$

$E \in \overline{0, K-1}$
 $i \in \overline{n, 0}$ $\rightarrow$ число итераций имеет порядок $\boxed{n \cdot K}$
на $\forall$ итерации выполняется арифм. операция,
полимногальные по длине чисел.

Для записи числа K в кодировке используется $\log_2 K$ символов $\Rightarrow$

$$K = 2^{\log_2 K} \text{ — экспонента от длины входа.}$$

Полученный алгоритм является псевдополиномиальным,

если подотнать
размерности

10.1. Сильная NP-полнота. Теорема о связи сильной NP-полноты задачи с существованием неограниченного алгоритма её решения.

Опр. Полиномиальная система числовой задачи Π — мн-во тех индивидуальных задач, числовое направление которых не превосходит полинома от длины входа:

$$\Pi_{P(\cdot)} := \{I \in \Pi \mid \text{num}(I) < P(|I|)\}$$

Опр. Числовая задача Π ^{расн об-б} я-я сильно NP-полна, если её полиномиальная система NP-полна, т.е. $\text{FP}(\cdot)$:

$$\Pi_{P(\cdot)} \in \text{NPC}$$

Пример: $\text{ВЫ}\Pi$ — сильно NP-полна, т.к. $\text{ВЫ}\Pi_{P(\cdot)} = \text{ВЫ}\Pi \in \text{NPC}$.

Теорема. Если $P \neq \text{NP}$, то для всех сильно NP-полных задач $\hookrightarrow$ для неё не существует неограниченного алгоритма решения.

► Пусть ДМТ A решает сильно NP-полную задачу Π и $\forall I \in \Pi \hookrightarrow \text{FP}'_{T,1}$

$t_A(e(I)) < P'(|I|, \text{num}(I))$. Т.к. Π — сильно NP-полна, то

Рассм. её полиномиальную систему. $\forall I \in \Pi_{P(\cdot)} \hookrightarrow$

$$t_A(e(I)) < P'(|I|, P(|I|)) = P''(|I|) \Rightarrow \Pi_{P(\cdot)} \in P \quad (?)$$

$$\Pi_{P(\cdot)} \in \text{NPC} \quad (10)$$

11.1. Определение комбинаторной задачи оптимизации и прикладного алгоритма её решения. Утверждение о разнице между прикладными и точными оптимизационными ЗР. (в постановке ОПТ-ин)

Опр. Задача дискретной (комбинаторной) оптимизации - массовая задача, имеющая следующее требование к решению: решением $\forall I \in \Pi$ является преобразованная реализация оптимальна

$$Opt_{\Pi}(I) = \max_{z \in S_{\Pi}(I)} f_{\Pi}(I, z), \quad (\text{или min})$$

т.е. такая точка $z^*(I) \in S_{\Pi}(I)$, где достигн

$$f_{\Pi}(I, z^*(I)) = Opt_{\Pi}(I).$$

Здесь $S_{\Pi}(I) \subseteq \mathbb{Z}^{n(I)}$ - $\emptyset \neq \emptyset$ дискретной (целочисленной) переменной $\mathbb{Z}$,

$f_{\Pi}(I, \cdot) : S_{\Pi}(I) \rightarrow \mathbb{Z}$ - целевая Ф-я принимает целые значения.

Вход задачи $\tilde{G} = e(I)$ делится на параметры, задающие ограничение задачи ($\emptyset \neq \emptyset$), — $\tilde{G}_s$ и на параметры, задающие функцию цели — $\tilde{G}_f$.

Пример: где ЗР имеем $f_{ЗР}(\tilde{G}, z) = \langle c, z \rangle$, $S_{ЗР}(\tilde{G}) = \{z = \{z_1, \dots, z_n\} \mid z_j \in \{0, \dots, n_j\} \wedge \langle w, z \rangle \leq K\}$. Тогда $\tilde{G}_s = (n, w, K)$, $\tilde{G}_f = (c)$

Задача комбинаторной оптимизации в постановке РАСП-2 Q-6:

$$\exists z \in S_n(I): f_n(I, z) \geq B \quad (\leq, \text{если min})$$

Заметим, что $\Pi_{\text{РАСП Q-6}} \propto \Pi_{\text{Опт}}$: пусть $f' = \text{const}$,

$$\Pi_{\text{Опт}} \propto \Pi_{\text{РАСП Q-6}} \text{ после нахождения } S'_n \text{ таково, что } \left\{ \begin{array}{l} z \in S_n \\ f_n(I, z) \geq B \end{array} \right.$$

Опт сравним с B .

Утв. Если $P \neq NP$, то $\forall \Pi_{\text{Опт}}$, где нет соотв. $\Pi_{\text{РАСП Q-6}} \in NPC \rightarrow$ для неё не существует ДИТ A :
 $T_A(\cdot) \leq P(\cdot)$

Опр. Алгоритм A решает $\Pi_{\text{Опт}}$, если $\forall I \in \Pi_{\text{Опт}}$ A принимает I и в качестве ответа даёт $z^*(I)$ — решение задачи I .

Опр. Алгоритм A — н-я приближённый алгоритм решения массовой задачи Π оптимизации, если $\forall I \in \Pi$ он находит некоторую точку из допустимой области $z_A(I) \in S_n(I)$, ^(если она не пуста) приближённую за приближённое значение. Значение $f_n(I, z_A(I))$ н-я приближённым значением оптимума и обозначается $A(I)$.

Это определение не даёт никаких гарантий о близости точного и приближённого решения. Если $P \neq NP$, то где ЗР нельзя построить полиномиальный приближённый алгоритм с наперед заданной абсолютной точностью ϵ :

Утв. Если $P \neq NP$, то ни для какой $C > 0$ не существует полиномиального приближённого алгоритма A решеия ЗР с оценкой $|\text{Opt}_{\text{ЗР}}(I) - A(I)| \leq C \quad \forall I \in \text{ЗР}$.

► Пусть A и C найдены. Построим алгоритм A' следующим образом:
 $\forall I \in \text{ЗР}$ докожем возмущаем целевой ф-ии (стоимости) C на $C+1$. Получим $I' \in \text{ЗР}$. Пусть ответ A' на I равен

$$A'(I) = \frac{A(I')}{C+1}$$

A полиномиален



A' полиномиален

Заметим, что $\text{Opt}_{\text{ЗР}}(I') = (C+1) \text{Opt}_{\text{ЗР}}(I)$.

Точность A' : $|\text{Opt}_{\text{ЗР}}(I) - A'(I)| = \left| \frac{\text{Opt}_{\text{ЗР}}(I')}{C+1} - \frac{A(I')}{C+1} \right| \leq \frac{C}{C+1} < 1$

Эт.к. P -задача комбинаторной оптимизации, без знания нуля $\Rightarrow$

Точность = 0 $\rightarrow$ получили полином. алгоритм $\text{ЗР}_{\text{ОПТ}} \rightarrow$ Построим Алг. и для $\text{ЗР}_{\text{расп.}} = \text{ЗР}_{\text{расп.}} \in P$ (?!)
 $P = NP$

12.1. Определение ϵ -приближённого алгоритма и ППНС. Связь между ППНС и невыполнимостью.

Опр Приближённый алгоритм A решает задачу Π оптимизации и-л ϵ -приближённым алгоритмом решение Π для некоторого $\epsilon > 0$, если $\forall I \in \Pi \rightarrow$

$$\frac{|O_{P\epsilon_\Pi}(I) - A(I)|}{|O_{P\epsilon_\Pi}(I)|} < \epsilon,$$

т.е. его относительная погрешность не превосходит ϵ .

Теорема. Пусть для задачи Π оптимизации

1) $\exists$ невыполнимый алгоритм её решения

2) $\forall I \in \Pi \rightarrow |O_{P\epsilon_\Pi}(I)| < P_1(|I|, \text{num}(I))$

где некоторые
 $P_1(\cdot, \cdot), P_2(\cdot, \cdot)$

$\forall I \in \Pi$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{num}(I) < P_2(|I|, O_{P\epsilon_\Pi}(I)) \end{array} \right.$

3) $\forall \tilde{\sigma} = e(I)$ параметры $\tilde{\sigma}_S$ и $\tilde{\sigma}_f$ не пересекаются, и
 $\forall z \in \sum_\Pi(\tilde{\sigma})$ Ф-я цели $f_\Pi(\tilde{\sigma}, z)$ линейно зависит от параметров $\tilde{\sigma}_f$.

Тогда $\exists P(\cdot, \cdot)$ -полином: $\forall \epsilon > 0 \exists A$ - ϵ -приближённый Алгоритм
 A_ϵ решение Π с временной сложностью $T_{A_\epsilon}(|I|) < P(|I|, \frac{1}{\epsilon})$ (12)

Набор ^{таких} алгоритмов $\{A_\varepsilon\}$ и-е полимально
кой приближённой схемой (ППНС). Решает задачи Π
 оптимально.

Наличие ППНС - лучше, что можно ожидать при решении NP-трудных
 задач. Однако ППНС могут использоваться и для полиномиальных
 задач, в случае если степень полинома меньше, чем у схемы
 точного решения.

13.1. Теорема об оптимальности ППНС для Π_{opt} , где $\Pi_{\text{расн}}$ - строго NP-полна.

Теорема Если для Π оптимальным соотв. ей $\Pi_{\text{расн}}$
 является строго NP-полной и $\exists P'(\cdot)$ -полином, т.ч. $\forall I \in \Pi$

$|Opt_\Pi(I)| < P'(\text{num}(I))$, то при условии, что $P \neq NP$, где Π
 не существует

ППНС

► Пусть ППНС существует. Построим алгоритм A' .

$\forall I$ A' выдает $A_\varepsilon \in \varepsilon = 1 / (P'(\text{num}(I)) + 1)$. По определению

ε -приближённого алгоритма $\hookrightarrow |Opt_\Pi(I) - A'_\varepsilon(I)| < |Opt_\Pi(I)| \cdot \varepsilon =$

$$\frac{|Opt_\Pi(I)|}{P'(\text{num}(I)) + 1} < \frac{P'(\text{num}(I))}{P'(\text{num}(I)) + 1} < 1 \rightarrow A' \text{ даёт точное решение,}$$

причём $T_{A'}(|I|) = T_{A_\varepsilon}(|I|) < P(|I|, P'(\text{num}(I)) + 1) \Rightarrow$

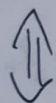
$P \neq NP$
 A' неограничен $\rightarrow$ (?) По теореме: если $P \neq NP$, то не существует
 строго NP-полной задачи $\nexists$ неограниченно
 строго NP-полная

14.1. Определение оЗЛП. Тригунт ураниных решен. Алгебраическая и битовая сложность ЛП. Взаимосвязи о сложности где задан, близкий к ЛП.

Рассмотрим конечную систему m линейных неравенств с конечным числом n вещественных неизвестных $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (1)$$

$A^{m \times n}$	$b^{m \times 1}$	Симплекс-таблица
$c^{1 \times n}$	0	



$Ax \leq b$. Считаем, что матрица A не содержит нулевых

строк. Система (1) задаёт полнотел (в отличие от многогранника, не обязательно ограниченный).

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0$ - гиперплоскость, $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ - полупространство.

Рассматриваемый случай, когда $a_{ij}, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$.

Опр. Основная задача ЛП (оЗЛП) состоит в нахождении такого решения (1), которое максимизирует заданную линейную Ф-ю $\langle c, x \rangle = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ вектора неизвестных x по всем $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющим (1):

$$d^* = \max_{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b} \langle c, x \rangle \quad (2)$$

Каноническая задача ЛП: $\min/\max \langle C, x \rangle$
 $Ax = b, x \geq 0$

формально
 Задачи ЛП не являются дискретными, однако их решение
 нетрудно свести к перебору конечного числа угловых
 точек (вершин полиэдра, задаваемого системой (1)) на
 основании принципа граничных решений:

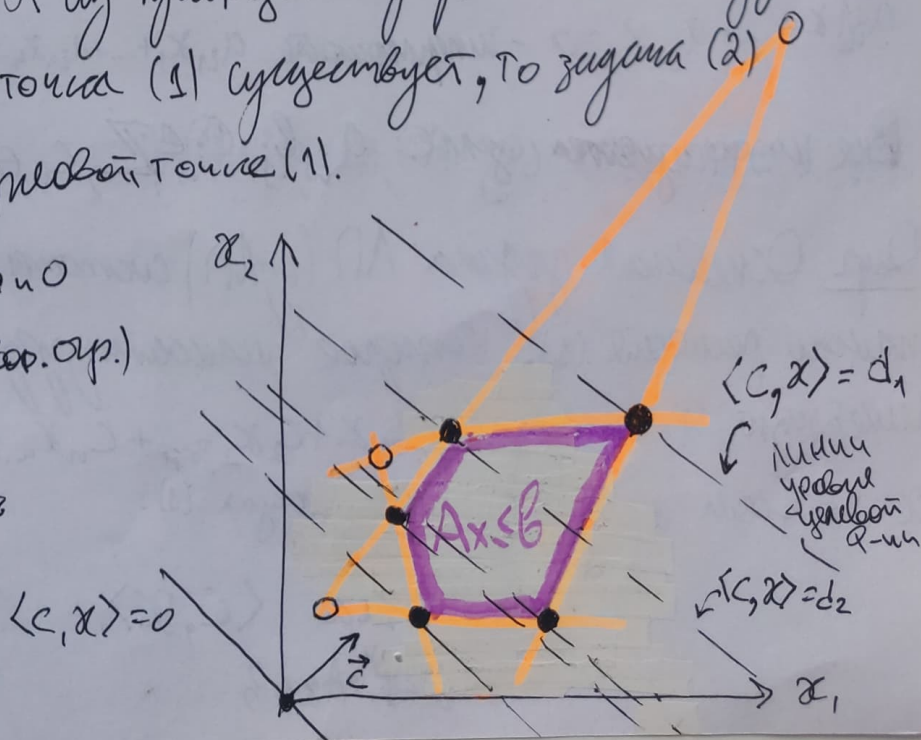
если задача (2): $d^* = \max \langle C, x \rangle$ имеет решение, то найдётся
 $x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b$

такая подматрица A_I матрицы A , что любое решение
 системы уравнений $A_I x = b_I$, т.е. $\{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \mid i \in I\}$
 реализует оптимальное значение.

Для невырожденных A_I решение системы, уф. (1), является
 угловой точкой (1). А из принципа уг. решений следует,
 что если угловая точка (1) существует, то задача (2)
 имеет решение и в угловой точке (1).

У потенциальных макс.
 Угловых точек $C_m: \bullet$ и 0
 (надо проверить условие экстр. опр.)

Для выбранной A_I
 методом Гаусса можно получить
 решение не более чем за
 полином 3 степени
 от m , и арифм. операций
 с элем. A и b .



Опр Линейная сложность - Ф-я, оценивающая число арифметических операций с битами записи параметров индив. задан. (= временная сложность $T_A(n)$)

Опр Алгебраическая сложность - Ф-я, оценивающая число арифметических операций в зависимости от количества элементов (n и m), а не от длины их записи.

Для ЛП можно построить алгоритм сечения, алгебраическая сложность которого будет $f(n) \cdot m$, где $f(\cdot)$ растёт быстрее экспоненты. Алгоритм с алгебраической сложностью "Полином по n и m одновременно" не известен и вряд ли будет построен.

Однако, для ЛП Л.Г. Хачианом был предложен алгоритм с полиномиальной битовой сложностью, что доказано принадлежит ЛП к классу полиномиальных задач. ($\Rightarrow$ $NP \in P$)

Опр Алгоритм является сильнополиномиальным, если имеет полиномиальную алгебраическую сложность.

Для ЛП всегда $\exists$ сильнополиномиальный алгоритм.

Рассмотрим неполномитальное обобщение ЛП:

Задача проверки истинности высказываний вида

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n F(\langle a_1, x \rangle \leq b_1, \dots, \langle a_m, x \rangle \leq b_m),$$

где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $F(\cdot, \dots, \cdot)$ - предикат, составленный из линейных неравенств с помощью связей $\&, \vee, \neg$

Доказано, что $\exists$ алгоритм, решающий эту задачу, имеет не менее чем экспоненциальную сложность.

(в т.ч. если $\leq$ заменить на $=$)

15.1. Теорема о граничных решениях задачи ЛП с целыми к-ми.

Для заданной матрицы D введём параметр

$$\Delta(D) = \max_{\substack{D' \text{ - невырожд. матрица} \\ D' \text{ по матрице } D}} |\det D'|$$

$[A|B]$ - матрица, сост. из матрицы A и вектора-столбца $B \in \mathbb{Z}^m$, интегрально состав.

Теорема (о граничных решениях). Если из ЛП $J^* = \max_{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b} \langle c, x \rangle$

размерности (n, m) с целыми коэффициентами разрешима, то у неё существует рациональное решение x^* в шаре

$$\|x\| < n^{1/2} \cdot \Delta([A|B]), \text{ и значением из ЛП } J^* \text{ является}$$

рациональное число $\frac{t}{s}$, причём $s \leq \Delta(A)$.

► По принципу граничных решений $\exists A_I$ ^{невырожд.} $A_I \subseteq A$, т.ч. $\forall$ решение $A_I x = b_I$ реализует оптимальн задачу ЛП. Тогда по правую границу

$$|x_j^*| = \left| \frac{\det A_I^j}{\det A_I} \right| \leq |\det A_I^j| \leq \Delta([A|B])$$

$\swarrow$ ^{целое} _{число, не ноль} матрица, полученная из A_I заменой j -того столбца на b

$$\text{Тогда } \|x^*\| = \sqrt{x_1^{*2} + \dots + x_n^{*2}} \leq \sqrt{n \cdot \Delta^2([A|B])} = \sqrt{n} \Delta([A|B])$$

$$d^* = \langle c, x^* \rangle = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*. \text{ Т.к. } c_j \in \mathbb{Z}, \text{ знаменатель } d^*$$

может быть любым равным знаменателю x_j^* (у нас один S знаменатель, если не сопоставить)

$$a \quad |x_j| = \left| \frac{\det A_{\pm}^j}{\det A_{\pm}} \right|$$

$\Downarrow$

$$S = |\det A_{\pm}| \leq \Delta(A) \text{ по определению } \Delta. \quad \blacksquare$$

16.1. Теорема о мере несовместности систем линейных неравенств с целыми коэффициентами.

Опр. Точка x^ε ε -приближённым решением системы линейных неравенств $Ax \leq b$, если $\langle a_i, x^\varepsilon \rangle \leq b_i + \varepsilon$

$\forall i = \overline{1, m}$, где a_i — i -тая строка A , или в матричной записи,

$$Ax^\varepsilon \leq b + \varepsilon e, \quad (1^\varepsilon)$$

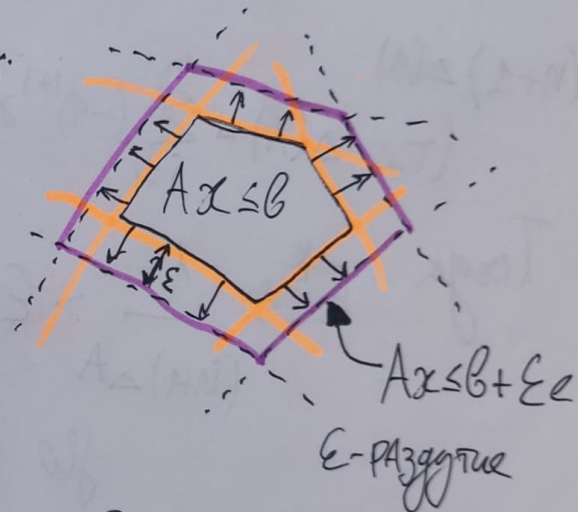
где e — вектор-столбец из единиц.

Несовместная система $Ax \leq b$



не имеет решений,
однако она может
иметь x^ε решение.

Оказывается, что ε не может быть сколь угодно малым.
Об этом говорят



Теорема (о мере несовместности). Если система ЛН $Ax \leq b$ имеет ε_1 -приближённое решение где $\varepsilon_1 = \frac{1}{(n+2) \cdot \Delta(A)}$, то эта система разрешима, т.е. имеет точное решение x^0 .

► Пусть ε^* — min из тех ε , при которых система (1^ε) имеет решение
 $\varepsilon^* := \min_{(x, \varepsilon): Ax \leq b + \varepsilon e} \varepsilon$. Заметим, что $\varepsilon^* \leq \varepsilon_1$.

Если умв. теоремы верно и (1^ε) не разрешима, то $\varepsilon^* > 0$.

$$\min(\cdot) = -\max(-\cdot)$$

$$\xi = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n + 1 \cdot \varepsilon$$

$$\xi^* = \min_{(x, \varepsilon): Ax \leq b + \varepsilon e} \xi$$

$$= -\max \langle (0, 0, \dots, 0, -1), (x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \rangle$$

$$(x, \varepsilon): [A | -\vec{1}] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \varepsilon \end{pmatrix} \leq b$$

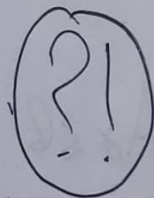
Тогда по т.о. наименьшее значение ξ равно разности $\Delta(A)$ и наименьшему значению ε : $|\xi^*| \leq \Delta([A | -\vec{1}]) \leq$

$$(n+1) \Delta(A)$$

(т.к. $\Delta(X) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} x_{ij} \bar{M}_{ij}^i$ - разлож. по строкам, $\forall$ кбл. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ имеет порядок $n+1$ по матрице $\hookrightarrow$ мин. ε имеет размер $n \times n$, т.к. это погр. A то $\det M \leq \Delta(A)$.)

Тогда $\xi^* \geq \frac{1}{(n+1) \Delta A} > \varepsilon_1 = \frac{1}{(n+2) \Delta A}$

по $\xi^* \leq \varepsilon_1$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & -1 \end{pmatrix}$$

17.1. Следствие систем линейных неравенств. Аффинная лемма Фурканна (без г-ва).

Опр. Система ЛН $Ax \leq b$ н-е разрешимой, если $\exists x: Ax \leq b$.

Опр. ЗЛП разрешима, когда $Ax \leq b$ разрешима и максимизи в $d = \max_{x \in R^n, Ax \leq b} \langle c, x \rangle$ достигается

Опр. Линейное неравенство $\langle c, x \rangle \leq d$ является следствием разрешимой системы неравенств $Ax \leq b$, если оно выполняется $\forall x$, удовлетвор.-го $Ax \leq b$.

Получить из $Ax \leq b$ следовые проехо: двойственные неравенства $\langle a_i, x \rangle \leq b_i$ на некоторые произвольные $\lambda_i \geq 0$ и сложив их.

где a_i - i -я строка A

b_i - i -тый эл-т b , $i \in \overline{1, m} = M$

$$\text{Получим } \langle \sum_{i \in M} \lambda_i a_i, x \rangle \leq \sum_{i \in M} \lambda_i b_i, \text{ т.е.}$$

Оказывается, других следствий у ЛН не бывает:

$$c = \sum_{i \in M} \lambda_i a_i$$

$$d \geq \sum_{i \in M} \lambda_i b_i$$

т.е. где должны d это тоже следовое

Лемма Фурканна (аффинная). Линейное неравенство $\langle c, x \rangle \leq d$ является следствием разрешимой ($\in \mathbb{R}^n$) системы ЛН $Ax \leq b$ **ТНПТТ**, когда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m$:

$$c = \sum_{i \in M} \lambda_i a_i, d \geq \sum_{i \in M} \lambda_i b_i, \lambda_i \geq 0 \forall i \in M$$

Можно записать эти же условия в матричной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda A = c \\ \lambda \geq 0 \\ \langle \lambda, b \rangle \leq d \end{array} \right.$$

Для неравенства системы ЛН $Ax \leq b$ можно формально считать её следствием зведённого неверного неравенства $\langle \bar{0}, x \rangle \leq -1$.
(где используется в лемме Фаркаса о неравенствах!)

18.1. Лемма Фаркаса о неразрешимости.

Лемма. Система ЛН $Ax \leq b$ неразрешима $\Leftrightarrow$

РАЗРЕШИМА система

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda A = \sum_{i \in M} \lambda_i a_i = \bar{0} \\ \langle \lambda, b \rangle = \sum_{i \in M} \lambda_i b_i \leq -1 \quad (*) \\ \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in M \end{array} \right. \quad \Rightarrow \text{ЛН} \in \text{NP}_{\text{co-NP}}, \text{ т.е. ЛН имеет Х.Х.}$$

► $\Rightarrow$ Пусть $Ax \leq b$ неразрешима. Тогда рассмотрим систему ЛН
 Если новая система разрешима, то
 $\langle a_i, x \rangle + x_{n+1} \leq b_i \quad \forall i \in M$ т.к. $Ax \leq b$ неразрешима по предположению,
 x не может быть ≥ 0 , т.е. $x_{n+1} \leq -\varepsilon < 0$, т.е. существует новая система ЛН
 будет неравенство $\langle (0, \dots, 0, \frac{1}{\varepsilon}), (x, x_{n+1}) \rangle \leq -1$ (просто переписали).

Тогда по аффинной лемме Фаркаса для разрешимой системы ЛН

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$m \times (n+1) \quad (n+1) \cdot 1 \rightarrow m-1$

получаем, что $C = \sum_{i \in M} \lambda_i a'_i = (0, \dots, 0, \frac{1}{\varepsilon})$ строка A'
 $\Rightarrow \sum_{i \in M} \lambda_i a_i = (0, \dots, 0)$ то, что нужно было получить
 $\sum_{i \in M} \lambda_i b_i \leq -1$

$\Leftarrow$ Если $Ax \leq b$ и $(*)$ обе разрешимы, то следствие (1) является следствием $(*)$
 $C = \sum_{i \in M} \lambda_i a_i, d = \sum_{i \in M} \lambda_i b_i \leq -1 \rightarrow \langle \bar{0}, x \rangle \leq -1 \Rightarrow$ следствие $Ax \leq b \Rightarrow$
 и reverse а сист. $Ax \leq b$ верно $\Rightarrow Ax \leq b$ разрешима

19.1. Теорема двойственности ЛП

Опр. Двойственной к задаче ЛП на максимум с ограничениями-неравенствами в форме ОЗЛП: $\max \langle C, x \rangle, x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b$

следующая задача ЛП на $\min$ с ограничениями в канонической

форме: $\min \left\{ \sum_{i \in M} \lambda_i b_i \mid \sum_{i \in M} \lambda_i a_i = C, \lambda_i \geq 0 \forall i \in M \right\}, \text{ т.е.}$

$$\boxed{d^{**} = \min \langle \lambda, b \rangle \mid \lambda A = C, \lambda \geq 0} \quad (**) = (7)$$

Чтобы построить двойственную задачу к произвольной задаче ЛП, можно представить её в форме ОЗЛП, применить формулу (**), затем вернуться к обозначениям исходной задачи.

Теорема (двойственности ЛП). Задача ЛП разрешима

тогда и только тогда, когда разрешима двойственная к ней. В случае разрешимости оптимальные значения целевых ф-ий в обеих задачах совпадают, т.е. $\boxed{d^* = d^{**}}$.

► Приведём $\forall$ задачу к форме ОЗЛП: $\boxed{d^* = \max \langle C, x \rangle, x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b} \quad (*) = (2)$

$\Rightarrow$ Пусть $(*)$ разрешима. Тогда $\langle C, x \rangle \leq d$ является следствием $Ax \leq b$ при $\forall d \geq d^*$ и не является им при $\forall d < d^*$ (т.к. $d^* = \max_{x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b} \langle C, x \rangle$).

по Архимедовой лемме ФАРКАША это означает, что система

$$\begin{cases} C = \lambda A \\ d \geq \langle \lambda, b \rangle \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \quad \underline{(\ast\ast\ast)} = (5) = \text{NP1}$$

РАЗРЕШИМА при $d \geq d^*$ и НЕРАЗРЕШИМА при $d < d^*$, т.е.

d^* - минимальное d , при кот. выполн. $(\ast\ast\ast)$ - т.е. оптимальн. $(\ast\ast)$:

А это есть $d^{\ast\ast}$, т.е. $d^{\ast\ast} = d^*$

$$\begin{cases} \lambda A = C \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Пусть $(\ast\ast)$ разрешима. Покажем, что из этого следует неразрешимость

$$\begin{cases} \lambda A = 0 \\ \langle \lambda, b \rangle \leq -1 \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \quad \underline{(\ast\ast\ast\ast)} = (6) = \text{NP2}$$

Пусть $(\ast\ast\ast\ast)$ разрешима и имеет решение λ' . Рассмотрим $\hat{\lambda} = \lambda' + \lambda''$, где λ'' - решение (7). Тогда $\hat{\lambda} A = C$, $\hat{\lambda} \geq 0$, $\hat{\lambda} < \lambda'' \rightarrow d^{\ast\ast} = -\infty \rightarrow (?)$
 дает гомогенную точку и уменьшается значение целевой Ф-ции.

Значит, действительно, $(\ast\ast\ast\ast)$ неразрешима. Тогда по лемме ФАРКАША о неразрешимости $Ax \leq b$ разрешима. Останется п-ть, что d^* достигается и $\exists d^{\ast\ast}$.

Отсюда заметим, что $\langle \lambda, b \rangle \leq d$ экв. следствию $(\ast\ast) \Leftrightarrow d \geq d^{\ast\ast} \Rightarrow$ по Архимедовой лемме ФАРКАША $(\ast\ast\ast\ast)$ разрешима $\Leftrightarrow d \geq d^{\ast\ast} \Rightarrow$ пока $\langle \lambda, b \rangle \leq d$ экв. $\alpha(\lambda)$ при $d \geq d^{\ast\ast} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ значение задачи (*) ограничено $d^{**} \Rightarrow \max$ достигается. Разрешимость
 доказана. ($d^* = d^{**}$ следует из начала g -ва теоремы)
 "Пусть (*) разрешима,"



Заметим, что происходит при неразрешимости одной из задач (*), (**).

1) если $Ax \leq b$ несовместна $\Leftrightarrow$ совокупная система $\Leftrightarrow$ (из последней части g -ва) $d^{**} = -\infty$
 (****)

2) если $\exists \lambda \geq 0: \lambda A = c \Leftrightarrow$ (****) неразрешима, т.е. $\nexists d: \langle c, x \rangle \leq d$
 (ср. с **) несовместна
 $\Downarrow$
 $d^* = +\infty$.

20.1. Сведение ОЛП к эквивалентной системе уравнений с ограничением $x \geq 0, x \neq 0$.

Приведем ряд следствий из теоремы двойственности ЛП.

Утв. $\forall x: Ax \leq b, \forall \lambda: \begin{cases} \lambda A = c \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \rightarrow \langle c, x \rangle \leq \langle \lambda, b \rangle$

► по т. двойственности $d^* = d^{**}$, причем d^* это $\max_{x \in R: Ax \leq b} \langle c, x \rangle$, а $d^{**} = \min_{\begin{cases} \lambda A = c \\ \lambda \geq 0 \end{cases}} \langle \lambda, b \rangle$

Утв ЛП_{опт} эквивалентна решению системы ЛН.

► по т. двойственности задачи $\max_{x \in R: Ax \leq b} \langle c, x \rangle$ и $\min_{\begin{cases} \lambda A = c \\ \lambda \geq 0 \end{cases}} \langle \lambda, b \rangle$ эквивалентны.

и $d^* = d^{**}$. Тогда решение одной из них эквивалентно решению системы ЛН:

Утв ЛП_{опт} эквивалентна решению СЛАУ в неотриц. перемен. $\left\{ \begin{array}{l} Ax \leq b \text{) опр. primal. задач.} \\ \lambda A = c \\ \lambda \geq 0 \text{) опр. dual. задач.} \end{array} \right.$

► От системы (справа можно перейти к опр. канон. Формы $Ax \leq b$ переводится в СЛАУ путем введения свободных переменных $\bar{x} = \bar{x} - \bar{b} \ (\bar{x} \geq 0, \bar{b} \geq 0), z = b - Ax \geq 0; \lambda = \bar{\gamma} - \bar{\delta} \ (\bar{\gamma} \geq 0, \bar{\delta} \geq 0) \begin{cases} A\bar{x} - A\bar{b} + z = b \\ \bar{\gamma}A - \bar{\delta}A = c \\ z, \bar{\gamma}, \bar{\delta} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{\gamma}A - \bar{\delta}A = c \\ z - \bar{\gamma}c - \bar{\delta}c = 0 \end{cases}$

$\hat{P}y = \hat{q}, y \geq 0$

Утв. ЛП_{опт} эквивалентна поиску конструктивного ненулевого решения однородной СЛАУ $(Px = 0, x \geq 0, x \neq 0)$

Из прошлого утверждения где $\forall i \in N$ имеет $\hat{e}_i$ решение системы:

$\begin{cases} \hat{P}y = \hat{q} \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$

Пусть $\hat{P}$ - матрица размера $K \times (N-1)$
Пусть $\Delta = \Delta(\hat{P}) = \Delta([A|b])$. Он максимален y_i решения (*), если оно существует

Добавим к (*) неравенство $\langle y, e \rangle = y_1 + \dots + y_{N-1} \leq N \cdot \Delta$, которое превратим в равенство с помощью введения y_N : $\langle \hat{y}, e \rangle = y_1 + \dots + y_{N-1} + y_N = N \cdot \Delta$

(*) можно переписать как
$$\begin{cases} [\hat{P} | \bar{0}] \hat{y} = \hat{q} \\ \hat{y} \geq \bar{0} \end{cases}, \text{ где } \hat{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$$

Сделаем замену: $x := \frac{\hat{y}}{\Delta}$ $\langle \hat{y}, e \rangle = N \cdot \Delta \Leftrightarrow \langle x, e \rangle = N$

Пусть $P := N \cdot \Delta \cdot [\hat{P} | \bar{0}] - [\hat{q} | \overbrace{\hat{q} \dots \hat{q}}^N]$

Получаем

$$\begin{cases} Px = \bar{0} \\ x \geq \bar{0} \\ \langle x, e \rangle = N \end{cases}$$

— корректность (+ гарантирует $x \neq \bar{0}$)

Если решением будут лишь $\pm x^0, \forall \epsilon > 0$, то все из которых $\langle x, e \rangle = N$ — решение исходной системы.

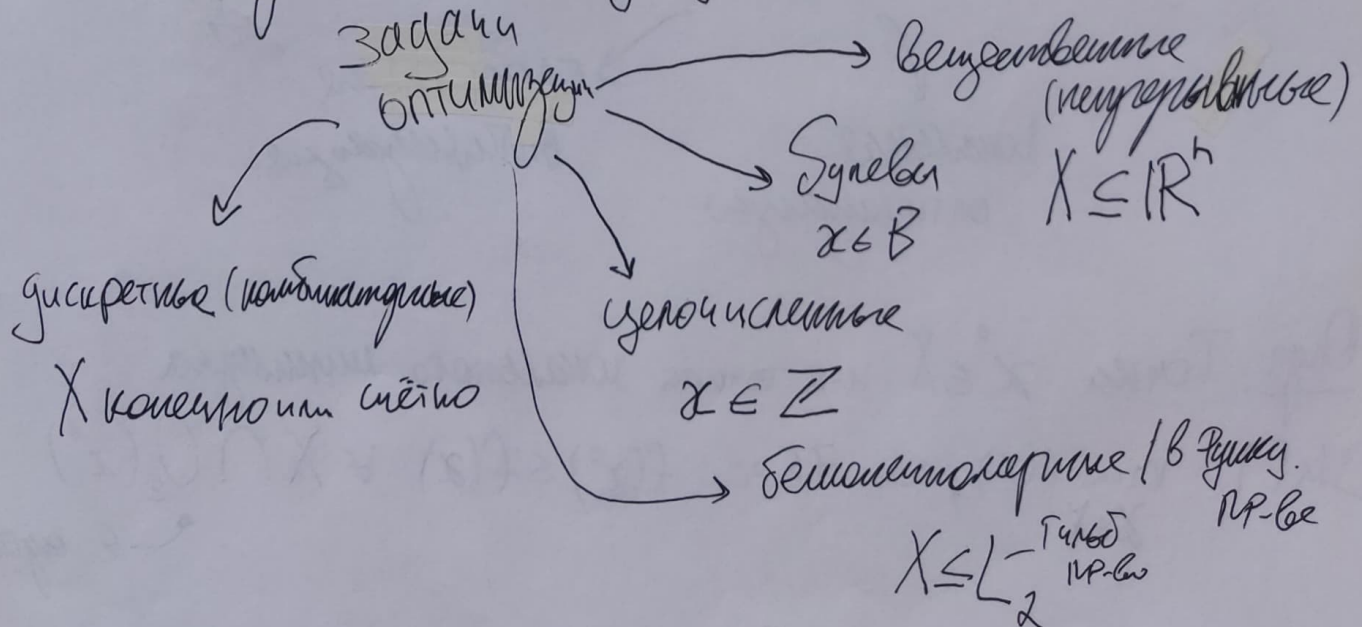
21.1. Классические задачи МП. Преимущество выпуклого случая.

Опр. Задача МП: $\min_{x \in X} f(x)$ (*)

Нужно найти значение и ^(предпочтительно) реализующую минимизация — f^* и $\operatorname{argmin}_{x \in X} f(x) \in \operatorname{Argmin}_{x \in X} f(x)$, т.е. $x^* \in X^* = \{x^* \in X \mid f(x^*) \leq f(x) \forall x \in X\}$ и $f^* = f(x^*)$

Любой такой x^* и-е решением (*), f^* — оптимальное значение целевой Ф-ции в задаче (1).

X — м-во ограничений или допустимых м-во.



ЗМП - когда $X \subset \mathbb{R}^n$.

Если $X \subset \mathbb{R}^n$, то это задача условной оптимизации $\downarrow x \in X$

$X = \mathbb{R}^n$ - безусловная

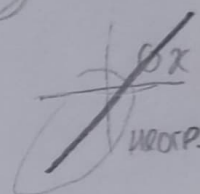
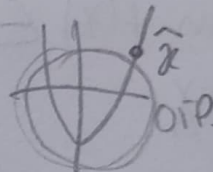
Для ЗМП минимум в (*) достигается в условиях

Т. Вейерштрасса:

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ непрерывна} \\ X \text{ компактно} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ непрерывна} \\ \text{ограничена на } X \end{array} \right.$

или $f: \{x \in X \mid f(x) \leq f(\hat{x})\}$
где некоторую $\hat{x} \in X$.



ЗМП

↓
локальная
оптимизация

→ глобальная
оптимизация.

Опр. Точка $x^0 \in X$ н-я точкой локального минимума
ЗМП $\min_{x \in X} f(x)$, если $\exists \varepsilon > 0: f(x^0) \leq f(x) \forall x \in X \cap O_\varepsilon(x^0)$
 $\leftarrow \varepsilon$ - достаточно

Задача глобальной оптимизации NP-трудна: УТВ $\text{ЦЛН} \propto \text{ЗМП}$

Поскольку ЦЛН можно представить как ЦЛП (с целевой ф-ей $f=c$), то для сведения ЦЛН к ЗМП нужно ^{лишь} "избавиться" от ^{целого} ограничения целочисленности; представь его в виде неравенства:

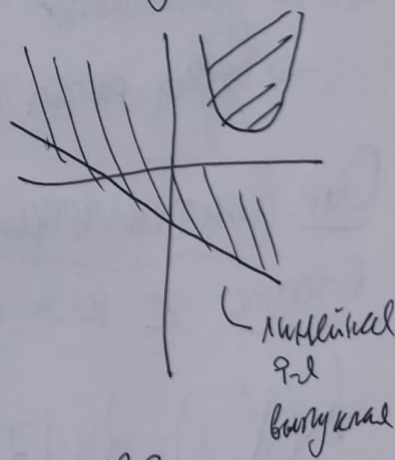
$$\{x_j \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow \{x_j \in \mathbb{R} \mid \sin^2(\pi x_j) \leq 0\}$$

Преимущество выпуклого программирования — их локальный экстремум совпадает с глобальным. Для них применим полн. алг. поиска Σ -прибл. решение — метод эллипсоидов.

Опр. Ф-я f н-я выпуклой на X , если её эпиграф

$\text{epi} \text{graf}_X f = \{(x, y) \mid y \geq f(x), x \in X\}$ является выпуклым множеством.

(мн-во н-я выпуклым, если вместе с любыми двумя точками оно содержит все точки отрезка, их соединяющего)



УТВ. Точка локального минимума выпуклой Ф-ии является точкой её глобального минимума.

► Пусть $f(x^0) > f(x^*)$ для некоторого $x^* \in X$. Тогда по определению выпуклой Ф-ии $f(x^0) > f(x) \forall (x^0, x^*] \supset X$, а,

Значит и в некоторой окрестности x^0 , что противоречит определению локального min. $\Rightarrow$ Таких точек x^0 не существует и x^0 — глобальный минимум.

22.1. Необходимые условия локального минимума при ограничениях - неравенствах для дифференцируемых Ф-и.

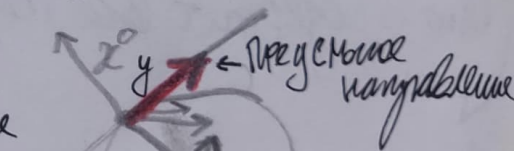
Рассматриваем задачу условной оптимизации $\min_{x \in X} f(x)$, где $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$.

В безусловной оптимизации важны направления спуска (убывание целевой Ф-и), в условной также нужно отслеживать невыход за ограничения.

Опр. Возможное (допустимое) направление в точке $x \in X$ — это такой вектор y , для которого $\exists \tau > 0: x + \tau y \in X \quad \forall \tau \in [0, \tau]$

Или допустимых направлений множество

$\Rightarrow$ Будем рассм. его замыкание, добавив предельные точки.



Опр. Контактным конусом к мн-ву X

в точке x н-я следующее мн-во векторов $y \in \mathbb{R}^n$:

$$K(X, x) = \{y \mid \exists \{(\tau_t, y^t)\}_{t=1}^{\infty} : (\tau_t, y^t) \rightarrow (0, y), \text{ и } \tau_t y^t \in X \quad \forall t\}$$

Для точек не из X допустимых направлений нет, K пусто

Для внутренней точки X допустимые направления — все $(\tau = r, \text{ где } r - \text{радиус шара, вместе с кот. } x \text{ входит в } X)$

$$K = \mathbb{R}^n$$

Для $x \in \partial X$ в случае гладкой границы $K(X, x)$ н-я также

Конусом касательных и совм. касательным направлением опт. неравенств.

Опр. Ф-я f и-я дифференцируема по Адамару в точке $x \in \mathbb{R}^n$,
 если $\exists$ вектор $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$, т.ч. $\forall y \in \mathbb{R}^n \rightarrow \lim_{(t,y') \rightarrow (0,y)} \frac{f(x+ty') - f(x)}{t} = \langle \nabla f(x), y \rangle$.

В рассматриваемом случае $\nabla f(x) = \text{grad } f(x)$, т.е. $y' = y$
 в нашем случае g -то по Адамару равносильна функцией
 дифференцируема (в n -мерном пространстве).

Теорема (общий вид необходимых условий локального минимума
 в задане $\min_{x \in X} f(x)$)

Пусть ф-я f диф-на по Адамару, $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, x^0 -точка локального минимума в $\min_{x \in X} f(x)$.

Тогда $\forall y \in K(X, x^0) \rightarrow \langle \nabla f(x^0), y \rangle \geq 0$

т.е. всякая убывание выводит за X

► Выберем $y \in K(X, x^0)$. По определению $K(X, x^0)$ направление y образует острый угол с градиентом, т.е. тупой угол с антиградиентом.

Контактного конуса есть последовательность

$\{(t_t, y^t)\}$, т.ч. $\forall t \rightarrow x^0 + t_t \cdot y^t \in X$ и, начиная с некоторого t ,

$x^0 + t_t y^t \in X \cap O_\varepsilon(x^0)$ (т.е. $t_t \rightarrow 0$). Тогда, поскольку x^0 -локальный

минимум, то $f(x^0 + t_t y^t) \geq f(x^0)$.

Тогда $\langle \nabla f(x^0), y \rangle = \lim_{(t,y') \rightarrow (0,y)} \frac{f(x+ty') - f(x)}{t} = \lim_{(t_t, y^t) \rightarrow (0,y)} \frac{f(x^0 + t_t y^t) - f(x^0)}{t_t} \geq 0$

Рассмотрим случай, когда ограничения задаются след. образом:

$$X = \{ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in M \} \quad (*)$$

Конкретизируем общий вид полученных керо-х. условий
экстремума для нашего случая.

Опр. Мно-во активных ограничений - $\forall x \in X$ это мн-во индексов

$J(x) = \{ i \in M \mid g_i(x) = 0 \}$ - те неравенства,
которые в данной точке x обращаются в равенство.

Определим конус допуст. направлений:

$$G(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_j(x), y \rangle \leq 0 \quad \forall j \in J(x) \}$$



которые образуют ту-то-у-ю с градиентами активных ограничений.

Опр. Мно-во X для ограничений неравенств $(*)$ н-я

регулярным в точке $x \in X$, если $G(x) \subseteq K(X, x)$

(конус допустимых направлений
вложен в конус касательный
конус.)

Теорема (необходимые условия локального минимума с ограничениями - неравенствами).

Пусть φ -ии f, g_i гл.Ф.-мы по Адамсу, $X \neq \emptyset, x^0$ - точка локального минимума f в задаче МП с ограничениями-неравн-ми. И мн-во X регулярно в точке x^0 . Тогда

$$\exists \lambda_j \geq 0 : \nabla \left\{ f + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j g_j \right\} \Big|_{x=x^0} = 0$$

↑
т.н.
множител
Лагранжа

ККТ:
в выпуклом случае
это эквив. дост. усл.

Пусть $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j \in M} \lambda_j g_j(x)$
Ф. Лагранжа
возьмем $\lambda_i = 0$ где неакт. огр
необх. условием также будет
 $\nabla_x L(x^0, \lambda) = 0$

Тогда $\langle \lambda, \bar{g}(x^0) \rangle = 0$
Верно условие дополн. усл. нехв. усл.

► Поскольку регулярно X в x обозначает $G(x) \leq K(X, x)$, то из теоремы об общем виде необх. условий следует, что

$$\langle \nabla f(x^0), y \rangle \geq 0 \text{ где все } y \text{ из } G(x), \text{ т.е. где}$$

$$y, \text{ удовлетворяющих условию } \langle \nabla g_j(x^0), y \rangle \leq 0 \quad \forall j \in J(x^0)$$

СИСТЕМА НЕРАВЕНСТВ
относительно y (пусть $\nabla g_j(x^0) = a_j$)

Из этой системы неравенств следует

$$\langle \nabla f(x^0), y \rangle \geq 0, \text{ а, значит, по Функцион}$$

$$\langle a_j, y \rangle \leq 0 \quad j \in J$$

лемме Фаркаша

$$\sum \lambda_j a_j$$

$$\exists \lambda_j \geq 0 : -\nabla f(x^0) = \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \nabla g_j(x^0)$$

23.1. Понятие регулярности неравенств в задаче МП.

Опр. Мно-во X из неравенств $X = \{g_i(x) \leq 0 \forall i \in M\}$ и-я регулярным в точке $x \in X$, если $G(x) \subseteq K(X, x)$
(т.е. конус допустимых направлений вложен в конический конус)

Утв. Если g_i - линейные ф-ции, то X регулярен. (в каждой точке)

Опр. Конус возможных направлений:

$$G(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x), y \rangle \leq 0 \forall i \in J(x)\}$$

G° - как G , но " $<$ " вместо " $\leq$ ".

Утв. В предположении гипот-ты по Адамсу ф-ии g_i , задающие неравенства $X = \{g_i(x) \leq 0 \forall i \in M\}$, верно, что $G^\circ(x) \subseteq K(X, x)$, $\forall x \in X$

т.е. $G^\circ(x)$ всегда включается в конический конус.

► Пусть это не так и $\exists y \in G^\circ(x) : y \notin K(X, x)$, т.е.

неверно, что для этого $y \in \bigcup_{t=1}^{\infty} \{(\tau_t, y^t) : (\tau_t, y^t) \rightarrow (0, y)\}$,
т.е. с последовательностью $(\tau_{t_s}, y_{t_s}^t) \rightarrow (0, y)$, $X + \tau_{t_s} y_{t_s}^t \in X \forall t_s$,
но $x + \tau_{t_s} y_{t_s}^t \notin X$, т.е. $\exists$ индекс j : $g_j(x + \tau_{t_s} y_{t_s}^t) > 0$

Н-во неравенств конечно, а различных $t_s \rightarrow \infty \Rightarrow$

по принципу Дирихле найдется ограниченная, пусть i -е, которая нарушается ∞ число раз. Возникнет соотв. подпоследовательность $\{t_k\}$: $g_i(x + \tau_{t_k} y_{t_k}) > 0$. При $k \rightarrow \infty, \tau_{t_k} \rightarrow 0 \Rightarrow$

$g_i(x) \geq 0$. Но т.к. $x \in X$, то $g_i(x) \leq 0 \Rightarrow g_i(x) = 0$, т.е. $i \in J(x)$. Но где это? i верно, что $\forall y \in Y$

$\langle \nabla g_i(x), y \rangle = \lim_{(\tau, y') \rightarrow (0, y)} \frac{g_i(x + \tau y') - g_i(x)}{\tau} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g_i(x + \tau_{t_k} y_{t_k}) - g_i(x)}{\tau_{t_k}} = 0$

а это противоречит определению G_0 (там " $<$ ").

Отсюда следует условие регулярности:

Из сделанных предположений $G(x) = \overline{G^0(x)}$ гарантирует регулярность X в x .

► $K(X, x)$ -замкнутое мн-во по орг, $G^0 \subset K \rightarrow \overline{G^0} \subset K \rightarrow$ ес. регулярность.

Утв. Достаточным для G является $G^0(x) \neq \emptyset$

► Пусть это верно. Тогда для алгебраической суммы $G \cup G^0 \hookrightarrow G + G^0 \subseteq G^0$, т.е. $\overline{G + G^0} \subseteq \overline{G^0}$, а $\overline{G^0} \supseteq \overline{0}$ даёт $G + \overline{G^0} \supseteq G$. Из линейности оператора замыкания и замкнутости G получаем $G(x) = \overline{G^0(x)}$ (25)

Для множества X $G^{\circ}(X) \neq \emptyset$ называется

глобальным максимумом: $\exists x' \in X : g_i(x') \leq 0 \quad \underline{\forall i \in M}$.

24.1. Теорема о целочисленном решении задачи ЛП с целыми коэффициентами, где вносятся умноженные матрицы ограничений.

Рассматривается задача ЦЛП: ЛП с дополнительными ограничениями целочисленности переменных:

$$J^* = \max \langle c, z \rangle$$

$$Az \leq b$$

$$z \in \mathbb{Z}^n$$

Также рассматривается задача ЛП с целыми коэффициентами:

$$J^* = \max \langle c, x \rangle$$

$$Ax \leq b$$

$$a_{ij}, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$$

Есть случаи, когда ~~решим~~ ЛП без оуп. $z \in \mathbb{Z}^n$ эквивалентна ЦЛП:

Опр Матрица $n \times n$ вносе умножительной, если определитель любой её невырожденной подматрицы по модулю $\neq 0$ равен 1.

Утв. Если матрица ограничений разрешимой задачи ЛП с целыми коэффициентами вносе умножительная, то у неё существует целочисленное решение.

► По принципу граничных решений если задача ЛП разрешима, то некоторая угловая точка будет решением. Угловая точка есть решение системы уравнений, которая образована некоторой подматрицей A .

По правилу Крамера $|x_j^*| = \left| \frac{\det A_{jI}^j}{\det A_{I \in I}} \right| = |\det A_{I \in I}^j| \in \mathbb{Z}$, т.е. $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ (26)

УТВ 2. Матрица A вполне унимодулярна $\Leftrightarrow$

$\forall v \in \mathbb{Z}^m$ все вершины многогранника $\begin{cases} Ax \leq v \\ x \geq \bar{0} \end{cases}$ являются

целочисленными.

т.е. получить необходимое условие целочисленности решетки -
вполне унимодулярная

$\Rightarrow$:

▶ Аналогично УТВ. 1

$\Leftarrow$: См. г-ва ([2, с. 333])

Утв 3. Если все элементы симплекс-таблицы a_{ij}, b_i, c_j

- натуральные, то $\forall$ решения x^0 задачи $\bigwedge \max_{Ax \leq b, x \geq 0} \langle c, x \rangle \rightarrow$

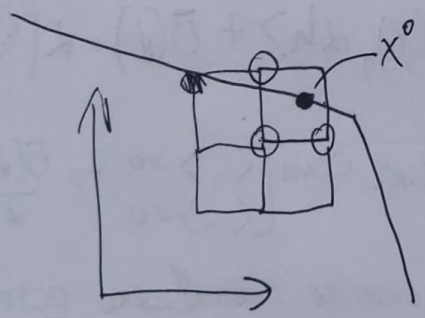
вектор $[x^0]$, составленный из компонент $[x_j^0]$, будет

допустимым в этой задаче. При этом для решения x^* задачи

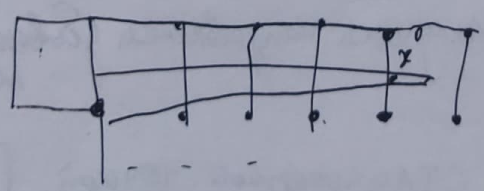
$\bigwedge \max_{Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n} \langle c, x \rangle$ получается оценка $|\langle c, [x^0] \rangle - \langle c, x^* \rangle| \leq \langle c, \bar{1} \rangle$

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Рисунок-пример. Пусть имеются 2 уравнения: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \end{cases}$



$\forall x: Ax \leq b \exists y \leq x$ целочисленный, т.е. $Ay \leq b$.
Надо перебрать разные варианты
окружение 2^n
вариантов



тут не хватит даже перебора 2^n точек

Поэтому возникает, вообще говоря, очень большой перебор.

можно попробовать сократить его в хороших случаях $\rightarrow$ ИВГ где ЦЛП. (27)

1.2. Формула градиентного метода в задаче безусловной минимизации.

Рассматриваемая задача поиска локального минимума Ф-ии $f(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$ (безусловная оптимизация). Для её решения можно использовать методы локального спуска.

Опр. Вектор $h \in \mathbb{R}^n$ н-я направлением убывания Ф-ии f в точке x , если $f(x + \alpha h) < f(x)$ для всех достаточно малых $\alpha > 0$.

Утв. Пусть f дифференцируема в точке x . Тогда, 1) если $\langle \text{grad } f(x), h \rangle < 0$, то h -направление убывания Ф-ии f в точке x ; 2) если h -направление убывания Ф-ии f в точке x , то $\langle \text{grad } f(x), h \rangle \leq 0$.

► из утв-ия f в x для достаточно малых α

$$f(x + \alpha h) - f(x) = \langle \text{grad } f(x), \alpha h \rangle + o(\alpha) = \alpha (\langle \text{grad } f(x), h \rangle +$$

$+ \frac{o(\alpha)}{\alpha})$. Отсюда следует утверждение (т.е. если $\langle \dots \rangle > 0$, то $\frac{o(\alpha)}{\alpha}$ не меняет знак)
 $\langle \dots \rangle < 0$

Т.е. направление убывания h для Ф-ии должно составлять острый угол с её антиградиентом, который явл. наилучшим направлением убывания в линейном приближении.

Если $\text{grad } f(x) = 0$, то x н-я стационарной точкой. В задаче безусловной оптимизации стационарные точки явл. я необходимыми условием локального минимума. Двигаюсь небольшими шагами в направлении антиградиента в текущей точке, можно уйти в ст. точку:

$$x^{t+1} = x^t - \alpha_t \text{grad } f(x^t) \quad t = 1, \dots, \quad \forall x^1 \in \mathbb{R}^n.$$

Параметр $\alpha_t \in \mathbb{R}$ - шаговой множитель. Он может выбираться по-разному:

1) Пассивные способы: $\{\alpha_t\}$ выбирается заранее.

- постоянный шаг: $\alpha_t = \alpha_0 \quad \forall t$

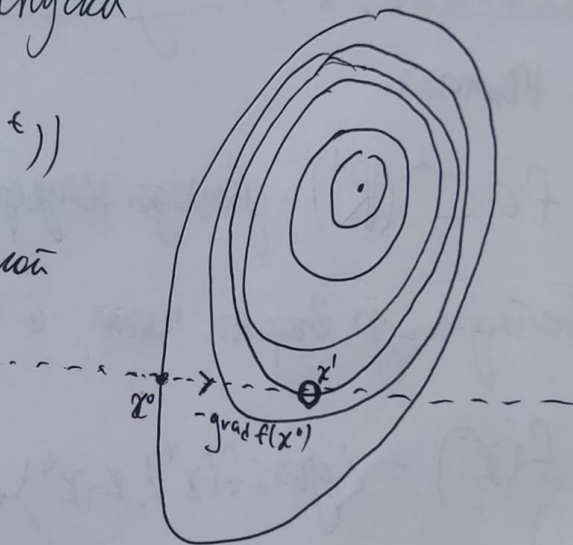
- убывающий шаг: $\alpha_t \downarrow 0 \leq \alpha_t = \infty, \sum \alpha_t^2 < \infty$. Например $\alpha_t = \frac{1}{t}$.

2) Адаптивные способы: $\{\alpha_t\}$ зависит от $\{x^t\}$.

- метод ступенчатого спуска

$$\alpha_t \in \operatorname{Argmin}_{\alpha > 0} f(x^t - \alpha \operatorname{grad} f(x^t))$$

Ищем минимум в одномерной задаче на каждом шаге.



- метод грубого шага / грубого поиска: если $f(x^{t+1}) > f(x^t)$, то

возвращаемся к t -й итерации с уменьшенным шагом: $\alpha_t := \frac{\alpha_t}{2}$.

- Правило Армико - путем грубого шага добиваемся:

$$f(x^t - \alpha_t \operatorname{grad} f(x^t)) - f(x^t) - f(x^t) \leq -\varepsilon \alpha_t \|\operatorname{grad} f(x^t)\|^2$$

Градиентный метод даёт линейную скорость сходимости: т.е. если

x^* - точка локального минимума, то $\|x^{t+1} - x^*\| \leq q \|x^t - x^*\|$, т.е.

$$\|x^{t+1} - x^*\| \leq q^t \|x^1 - x^*\| \quad \text{для некоторого } 0 < q < 1,$$

т.к. на каждом шаге используется линейная аппроксимация градиентной функции.

2.2. Формула метода Ньютона в задаче безусловной минимизации.

Рассматривается задача поиска локального минимума φ -чл $f(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$ (безусловная оптимизация). Метод градиентов использует линейное приближение и имеет линейную скорость сходимости. Более высокую скорость сходимости получают для методов, основанных на квадратичной аппроксимации; например, для метода Ньютона.

Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ - дважды непрерывно дифференцируемая ф-я. Разложим её в ряд Тейлора до второго члена в окрестности x^t :

$$f(x) - f(x^t) = \langle \text{grad} f(x^t), x - x^t \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(x^t)(x - x^t), x - x^t \rangle + o(\|x - x^t\|^2),$$

где f'' - матрица:

Выберем x^{t+1} из условия минимизации

квадратичной аппроксимации:

$$\text{grad} f(x^t) + f''(x^t)(x - x^t) = 0$$

$$x = x^{t+1} = x^t - \left(f''(x^t) \right)^{-1} \text{grad} f(x^t)$$

$t = 1, 2, \dots$

Начальное приближение x^1 должно находиться достаточно близко к x^* .

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

При дополнительных предположениях (более сильных, чем для оценки градиентного метода) для метода Ньютона будет справедлива квадратичная скорость сходимости:

$$\|x^{t+1} - x^*\| \leq Q \|x^t - x^*\|^2$$

$$\|x^{t+1} - x^*\| \leq \frac{1}{Q} (Q \|x^1 - x^*\|)^{2^t}$$

$$\|x^1 - x^*\| < \frac{1}{Q} \text{ - требование на начальное предположение}$$

Для применения метода Ньютона требуется невырожденность матрицы вторых производных.

3.2. Идея метода ЦТРАФОВ.

Пусть им-во ограничено $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in M\}$
задается ограничением-неравенством. Стоит задача
условной минимизации: $\min_{x \in X} f(x)$. Идея метода ЦТРАФОВ —

Рассмотреть вместо неё где достаточно большой константы $C > 0$
задачу безусловной минимизации оцтрафованной
целевой ф-ии:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + C \cdot \underbrace{\sum_{i \in M} g_i^+(x)^P}_{\text{Ф-я ЦТРАФА, ЦТРАФованная Ф-я}} \right\}, \text{ где}$$

Ф-я ЦТРАФА, ЦТРАФованная Ф-я.
где g_i^+ — неравенство.

$$g^+(\cdot) := \max\{0, g(\cdot)\} - \text{срезка } g,$$

Ф-параметры ЦТРАФА, $P \geq 1$.

Воспомянув непрерывности f, g_i , непрерывности X и ограниченности им-ва X можно показать, что

$$\lim_{C \uparrow \infty} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + C \sum_{i \in M} g_i^+(x)^P \right\} = f^*$$

Острый ЛТРАР: $P=1$

$$\exists C^*: \min \{f(x) + C^* \sum_{i \in M} g_i^+(x)\} = f^*, \text{ т.е. суммирует точный ЛТРАР.}$$

Тупой ЛТРАР: $P>1$

Нет точного ЛТРАР, иначе ограничение $x \in X$ было бы избыточным (точка безусловного мин так находится в X).

4.2. Теоретическое описание / идея симплекс-метода.

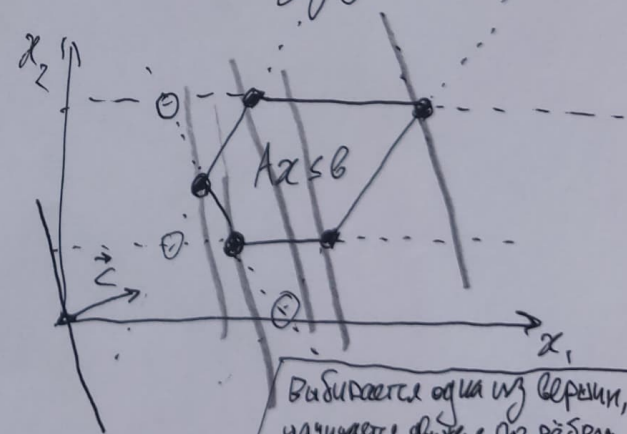
Рассмотрим задачу ЛП:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (1) \text{ или } Ax \leq b.$$

Думаем, что A не содержит нулевых строк. Система (1) задаёт полнэдр (в отличие от многогранника, он может быть неограниченным).
 $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0$ — Гиперплоскость
 $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ — Полупространство.

Требуется найти такое решение (1), которое максимизирует $\langle c, x \rangle$:

$$(2) \quad d^* = \max_{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b} \langle c, x \rangle$$



Симплекс-метод — метод направленного перебора смежных

вершин (1). В направлении возрастания целевой ф-ции. Основывается на принципе граничных решений, который гарантирует, что если угловая точка (1) существует, то

разрешимая задача (2) имеет решение в т.ч. в ^{какой-то} угловой точке (1).

Выбирается одна из вершин, начинается движение по ребрам полнэдра от верш. к вершине в сторону увеличения $\langle c, x \rangle$.
 Когда нет соседних вершин с большим $\langle c, x \rangle$, ~~метод~~ ~~останавливается~~ метод останавливается.

5.2. Метод глобальной минимизации.

Рассмотрим задачу глобальной минимизации. Известно множество X (уже упомянуты условия) — единичный n -мерный куб. Итак, требуется найти

$$\min_{x \in X} f(x)$$

1. Метод Монте-Карло.

Выберем в соответствии с равномерным распределением на X случайные точки x^t , в которых будем вычислять числовое значение Ф-ии, запоминая наименьшее — Рекорд x (+ его Ф-ии значение).

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ вероятность того, что разность между f^* и f' будет $> \varepsilon$:

$$\mathbb{P} \left(\min_t f(x^t) - f^* > \varepsilon \right) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

Сходимость такого метода будет довольно медленной. К тому же мы не знаем, на каком расстоянии от f^* находится полученная реализация.

Судим класс рассматриваемых задач: Пусть целевая Ф.ц
линейна на X с константой Липшица L :

$$|f(x) - f(x')| \leq L \cdot \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in X. \quad (*)$$

Хотим найти ε -приближённое решение x^ε :
по значению целевой Ф.ц, как близко x^ε к x^* отойдёт.

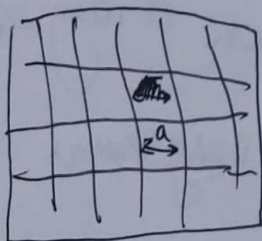
$$f(x^\varepsilon) \leq f(x^*) + \varepsilon$$

2. Пассивный способ перебора: не используем никакой информации о целевой Ф.ц для выбора точки.

Разобьём X на подмножества X^j так, чтобы $\forall x, x' \in X^j \Rightarrow \|x - x'\| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{L}$.
 В каждом X^j берём произв. точку $x^j \in X^j$. Тогда

$$f(x^\varepsilon) := \min_j f(x^j) \text{ — используем приближённое решение}$$

Действительно, $\forall j, \forall x \in X^j \Rightarrow f(x^\varepsilon) \leq f(x^j) \leq f(x) + \varepsilon$ в силу $(*)$.



Сторона каждого подмножества будет равна $a = \frac{\varepsilon}{L \sqrt{n}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$,
 а всего подмножеств

$$\left(\frac{L \sqrt{n}}{\varepsilon} \right)^n = \left(\frac{1}{a} \right)^n \quad \left(\text{чтобы вышло} \right)$$

Очень много. т.к. куб единицы

3. Алгоритмический перебор, основанный на полном переборе.

Пусть уже вычислены значения Ф-ции в $x^1, \dots, x^{j-1}$ и в x^r

получим рекурренту $R = f(x^r)$. Тогда

• если $f(x^j) < f(x^r)$, обновим рекурренту (и пересчитаем $T_j(R)$ где $j=1, \dots, j-1$)

• если $f(x^j) > f(x^r)$, то можно не вычислять

значения Ф-ции на см-ве $T_j(R) = \{x \in X \mid \|x - x^j\| \leq \frac{f(x^j) - R}{L}\}$

т.к. это не дает

нового рекурренту

Минус: нужно хранить см-во $\bigcup T_i(R)$ заданных конт. точек, поскольку мы будем случайные x_j и лишь потом проверять, нужно ли там считать Ф-ию.

4. Метод ветвей и границ для глобальной минимизации

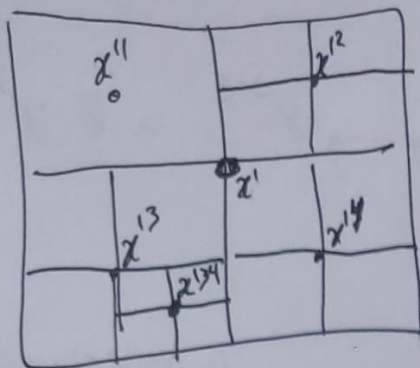
Пусть x^1 - центр куба X . $R := f(x^1)$. Разбиваем куб на

2^n подкубов X^{1i} со стороной $\frac{1}{2}$, вычислим $f(x^{1i})$ - значения $i=1, \dots, 2^n$

Ф-ции в их центрах, обновим рекурренту. Отбрасываем подкубы

$X^{1i} \not\subseteq T_{1i}(R)$. Продолжаем: делим $\forall$ подкуб на 2^n подкубов

X^{2ij} со стороной $\frac{1}{4}$, отбрасываем лишние.



Можно выбирать ^{очередной} куб для разбиения
по-разному: правило Вентерса

- в ширину



- в глубину



- смешанный вариант

- Кубы со стороной $\leq \frac{\epsilon}{L_{\max}}$ исключаются

- Кубы, появившиеся в $T_i(R)$ исключаются.

8.2. Пошаговый алгоритм сужения ε_1 -приближенного решения системы лнн. неравенств.

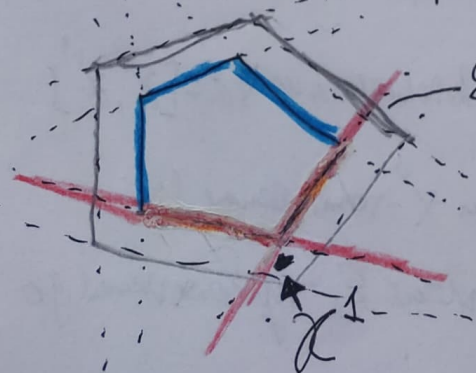
Из теоремы о пере несовместности следует, что если система ЛН $Ax \leq b$ имеет ε_1 -прибл. решение для $\varepsilon_1 = \frac{1}{(n+2)\Delta(A)}$ (то есть $\exists x^\varepsilon: Ax^\varepsilon \leq b + \varepsilon e$), то эта система имеет и точное решение x^0 . Существует ^(сильно) пошаговый алгоритм сужения ε_1 -приближенного решения $Ax \leq b$ до точного, предложенный Л.Г. Хачиком. Алгоритм:

Пусть $x^1 := x^{\varepsilon_1}$. Подставим x^1 в $Ax \leq b$. Разобьем множество $M = \{1, \dots, m\}$ индексов неравенств системы на

1) $M(x^1) = \{i: |\langle a_i, x^1 \rangle - b_i| \leq \varepsilon_1\}$, — ~~те~~ индексы, соотв. стр. выполн. с точн. до $\pm \varepsilon_1$

2) $M \setminus M(x^1) = \{i: \langle a_i, x^1 \rangle - b_i \leq -\varepsilon_1\}$ — индексы, где стр. выполн. с запасом

↑ т.к. $x^1 - \varepsilon_1$ -реш, то $\langle a_i, x^1 \rangle - b_i \leq \varepsilon_1$.

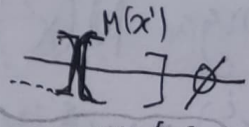


ε_1 -разгугие

Найдём решение x^{11} системы равенств

$$A_{M(x^1)} x = b_{M(x^1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \geq b_{\dots} \\ \dots \leq b_{\dots} \end{cases}$$

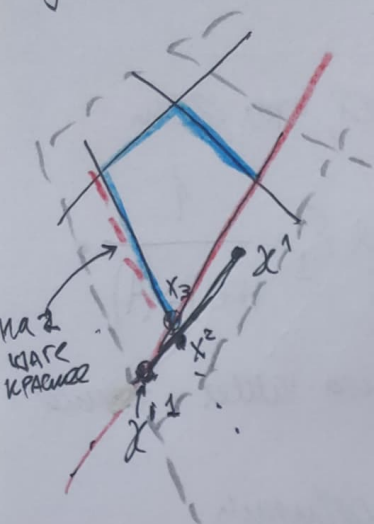
по теореме о несовместности решений
ТАКАЯ СИСТЕМА ИМЕЕТ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ



но по некоторым точкам не нет такого, что

строгое $\Rightarrow$, иначе это и так точное решение, кинемо герать не надо.

Если x^1 удовлетворяет $Ax \leq b$, это точное решение, конец.
 Но может не повезти и x^1 не будет точным решением $Ax \leq b$:



Введём м-во индексов невыполнения
 неравенств

$$M^+ = \{i \mid \langle a_i, x^1 \rangle > b_i\} \subseteq M \setminus M(x^1)$$

т.е. равные эти сур-я
 выполняются с запасом

Рассмотрим отрезок, соединяющий x^1 и x^{1^*} . Возьмем ближайшую к x^{1^*} точку, в которой ещё выполняются все неравенства для $i \in M^+$ (в x^1 они были выполнены с ε_1 -запасом).

$$x^2 := (1-\tau)x^1 + \tau x^{1^*}, \text{ где}$$

$$\tau = \min_{i \in M^+} \frac{b_i - \langle a_i, x^1 \rangle}{\langle a_i, x^{1^*} \rangle - \langle a_i, x^1 \rangle}, \quad i_1 = \arg \min_{i \in M^+} \dots$$

$$\text{Тогда } M(x^2) \supseteq M(x^1) \cup \{i_1\}$$

выполняется неравенство по построению.

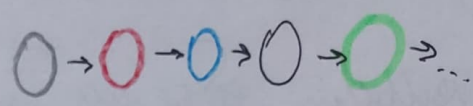
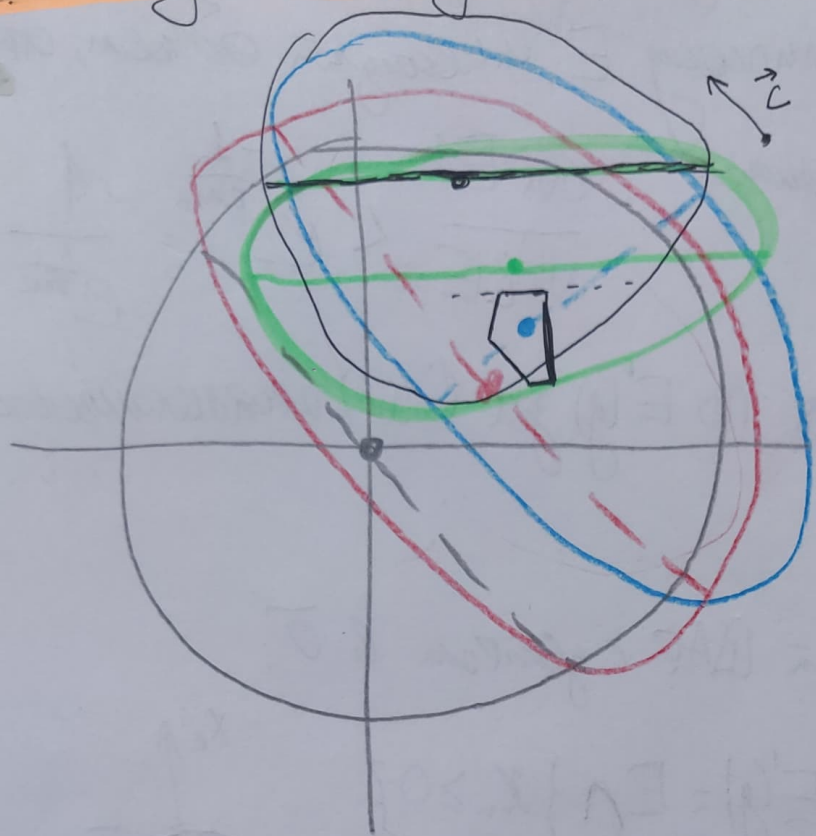
$$\begin{cases} M(x^i) \supset M(x^{i-1}) \\ |M(x)| \leq m \end{cases} \Rightarrow \text{этот процесс } \varepsilon_1\text{-приближённо выполнялся на } \forall x \in [x^1, x^{1^*}]$$

Этот процесс будет $\leq \max(n, m)$. Получим x^0 -точное решение (1).

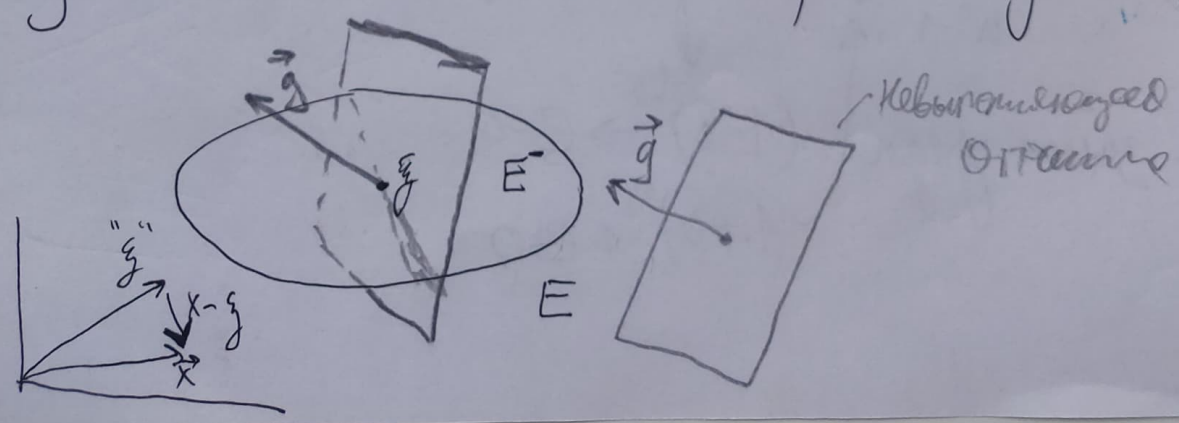
Аналогичный алгоритм существует для отыскания ε_2 -приближ. решения

точное $\left(\varepsilon_2 = \frac{1}{2n^2 \Delta^3(A)} \right)$. Получим-й Алг. поиска ε_2 -приближ. решения - метод Эллипсоидов

9.2. 24.2. Множество эллипсоидов: углы и описание



Пусть E — трансформированный эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром ξ и центром масс $\bar{\xi}$. Рассмотрим $(n-1)$ -мерную плоскость, заданную вектором $\vec{g}$ нормалью, проходящую через ξ . Обозначим через $E^-(\vec{g})$ один из двух полуэллипсоидов, на которые данная плоскость разбивает E , т.е. $E^-(\vec{g}) = E \cap \{x \mid \langle g, x - \xi \rangle \leq 0\}$.



Лемма 1. Пусть эллипсоид $E(y)$ эллипсоида E можно уложить
 целиком в новый эллипсоид E' , имеющий объём, строго
 меньший объёма E , причём $\frac{\text{vol } E'}{\text{vol } E} < e^{-\frac{1}{2n+2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2n+2}}}$,

и E' можно вычислить по $E(y)$ за $O(n^2)$ арифметических
 операций.

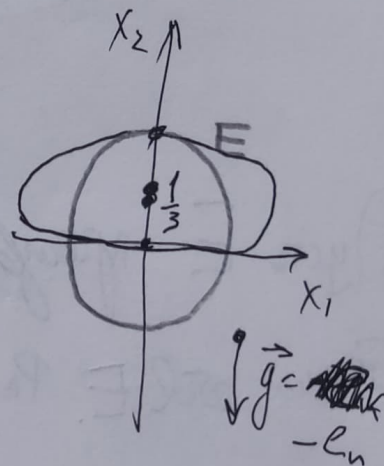
► Пусть E — единичный шар с центром в $\vec{0}$:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}, \quad E'(y) = E \cap \{x_n \geq 0\}$$

Перенесём центр E' в точку

$$y' = (0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}), \text{ тогда}$$

$$E' = \{x \mid (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)/\theta^2 + (x_n - \frac{1}{n+1})^2/2^2 \leq 1\},$$



где $L := 1 - \frac{1}{n+1} < e^{-\frac{1}{n+1}}$ ($\delta = \frac{1}{n+1}$, где $n+1$ переносим вправо)

$$\theta^2 := 1 + \frac{1}{n^2-1} < e^{\frac{1}{n^2-1}}$$

Вспомогат. предп.:

$$(1-\delta)^{1/\delta} \rightarrow e^{-1}$$

$$(1+\delta)^{1/\delta} \rightarrow e+0$$

Отношение объёмов $\Rightarrow$ эллипсоид $=$ отклонение $\star$ - и их пологоси (их n штук) $\alpha, \beta, \dots, \beta$.

$$E - \text{един. шар} \rightarrow \prod_{E} = 1$$

$$\frac{\text{Vol } E'}{\text{Vol } E} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta}^{n-1 \text{ пологоси}} \cdot \frac{1}{2n+2}}{1} < e$$

с учётом
разноса α и β

$$\frac{-1}{n+1} + \frac{n-1}{(n^2-1)^2} = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2n+2}$$

т.к. $\sqrt{\beta^2}$

$\forall$ эллипсоид можно превратить в шар аффинным преобразованием координат, которое сохраняет объём:
Произвольный эллипсоид E будем представлять с помощью центра ξ и матрицы Q ($n \times n$), задающей преобразование:

$$E = \{x \mid x = \xi + Qy, \|y\| \leq 1\} \quad \text{Пусть } \eta := \frac{Q^T g}{\|Q^T g\|}$$

Тогда за $O(n^2)$ ариф. операций пересчитываем

ξ' и Q' , представляющие эллипсоид E' мин. объёма:

$$\xi' = \xi - \frac{1}{n+1} Q \eta, \quad Q' = \frac{n}{n^2-1} \left(Q + \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right) Q \eta \eta^T \right).$$

Алгоритм метода эллипсоидов. Получение ε -решения ОЗЛП.

Положим $\varepsilon := \varepsilon_2 = \frac{1}{2n^2 \Delta^3}$. Рассмотрим шар с центром в $\bar{0}$

и $R = \sqrt{n} \Delta$. Хотим найти $x^\varepsilon \in X^\varepsilon = \left\{ x \mid \begin{array}{l} \langle a_i, x \rangle \leq b_i + \varepsilon, \\ \langle c, x \rangle \geq d^* - \varepsilon, \end{array} \forall i = \overline{1, m} \right\}$, $\|x\| \leq R$

↑
обозначим этот шар как E . $E \supset X_\varepsilon^*$, поэтому граница решетки

ε -от y -центра E - экв. Прибл. реш., алгоритм заканчивает работу,

В противном случае строим эллипсоид E' для очередной итерации. Строим R как min по объему эллипсоид, содержащий $E'(y)$, где вектор y определяется след. образом:
Т.к. $y \notin X_\varepsilon^*$, то либо нарушено какое-то гранич-е, либо мы вышли ε -раздута и можем идти к увеличению целевой ф-ции:

$$1^\circ) \exists i: \langle a_i, y \rangle > b_i + \varepsilon \rightarrow y := a_i$$

$$2^\circ) \langle c, y \rangle < d^* - \varepsilon \rightarrow y := -c$$

Положим $E := E'$ и вернемся к началу.

Утв. $X_\varepsilon^* \subset E^1$ на ε -регулярном ω -АМФР

► где 1°: $\leftarrow$ любое ε -прибл. решение было в той части эллипсоида, кот. мы выбрали.

$$\forall x \in X^* \rightarrow \begin{cases} \langle a_i, x \rangle \leq b_i + \varepsilon < \langle a_i, y \rangle \\ \langle a_i, y \rangle > b_i + \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{т.е. } X_\varepsilon^* \subset \underbrace{\left(E \cap \{x \mid \langle a_i, x - y \rangle \leq 0\} \right)}_{E^-(a_i)} = E^-$$

$E^-(a_i) = E^-$ по построению

где 2°:

$$\forall x \in X^* \rightarrow$$

$$\langle c, x \rangle \geq d^* - \varepsilon > \langle c, y \rangle$$

↓

$$X_\varepsilon^* \subset E \cap \{x \mid \langle c, x \rangle - y \geq 0\} = E^-(c) \in E^1$$

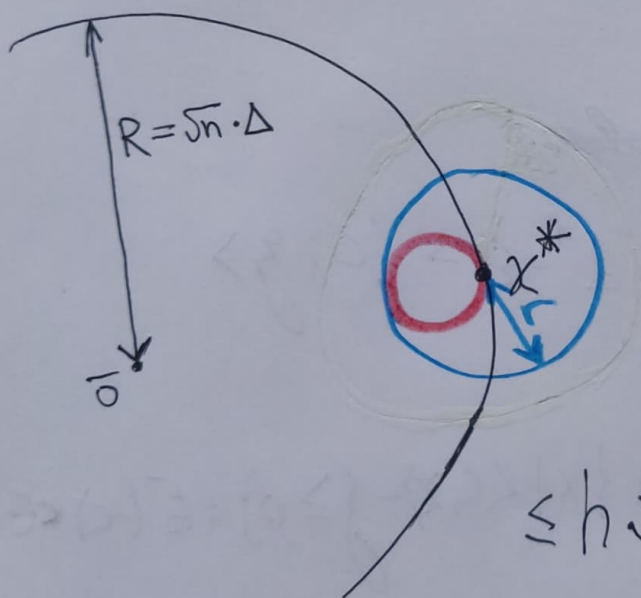
24.2. Оценка сложности метода Эммонса поиска ε -матричного решения о.н.

h - высота задачи: $h \geq |a_i|$
 $h \geq |c_i|$

Все $x^* \in X_\varepsilon$ содержат шар радиуса $\frac{r}{2}$, где $r := \frac{\varepsilon}{h\sqrt{n}} < R$.

Пусть x^* - точное решение о.н. $x^* \in X_\varepsilon$.

Возьмем x , т.ч. $\|x^* - x\| \leq r$.



Тогда

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad |\langle a_i, x \rangle - \langle a_i, x^* \rangle| &= \\ &= |\langle a_i, x - x^* \rangle| \leq \underbrace{\|a_i\|}_{\leq h\sqrt{n}} \cdot \underbrace{\|x - x^*\|}_{\leq r} \leq \\ &\leq h\sqrt{n} \cdot r = \varepsilon \end{aligned}$$

нерав-во КБ

по омп. r (т.е. все x из X_ε для ε -матрич. реш. о.н.)

$$\textcircled{2} \quad |\langle c, x \rangle - \langle c, x^* \rangle| \leq \|c\| \cdot \|x - x^*\| \leq h\sqrt{n}r = \varepsilon$$

Шар радиуса $\frac{r}{2}$ (шар радиуса r) точно $\subseteq$ шар рад. R .

$\Rightarrow$ если объект $\geq$ минимальн. постр. не отрицател. штрафны, меньше $\frac{r}{2}$, то о.н. неразрешима. Тогда

12 WAPY (PAGUY) $\frac{5}{2}$.

$$\frac{\text{Vol } E^1}{\text{Vol } E} < e^{-\frac{1}{2n+2}}$$

$$\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^n}{R^n} \leq \frac{\text{Vol } X_\varepsilon^*}{\text{Vol } E^1} \leq \frac{\text{Vol } E^k}{\text{Vol } E^1} < e^{-\frac{k}{2n+2}}$$

↙ переворачиваем

$$e^{\frac{k_0}{2412}} \leq \left(\frac{R}{r_2} \right)^4$$

$$\frac{K^0}{2n+2} \cdot n \cdot \ln \frac{2R}{r}$$

$$r = \sum \frac{1}{h \omega_n}$$

$$K_0 \leq 2n^2 l_n \left(\frac{R \sqrt{n} h}{\varepsilon} \right) \leq 2n^2 l_n(2n^3 \cdot \Delta^5) \leq \boxed{10n^2 l_n(n\Delta)}$$
$$\frac{1}{3} \ln 3$$

$$h \leq \Delta$$

$$R \approx 5n\Delta$$

$$\xi = \xi_2 = \frac{1}{2n \Delta^3}$$

Алгоритм работает ε_2 -приближенно $\exists$ тогда и только тогда, когда $LH \in P$

Алгоритм сортировки E_2 -примит. применяет 3 тем
вызывает не порядок

17 - покинутый, ЛН ∈ P.
сценарий коэф. сценарий к.ин

22.2. Угол метода Кармалюга.

Задача ЛП эквивалентна поиску неотрицательного ненулевого решения однородной системы линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} P x = 0 \\ x \geq \bar{0} \\ x \neq \bar{0} \end{array} \right. \quad \text{Пусть } P_i - i\text{-тая строка } P \text{ размера } K \times N. \quad (\langle x, e \rangle > 0)$$

Введём квадратичную Ф-ю $P(x) := (\langle P_1, x \rangle)^2 + \dots + (\langle P_K, x \rangle)^2$

Тогда $P x = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ (сумма квадратов = 0 $\Leftrightarrow$ каждое слагаемое = 0)

Ставим задачу минимизации Ф-ии Кармалюга:

$$\min_{x > \bar{0}} k(x), \text{ где } k(x) := \frac{(P(x))^{N/2}}{x_1 x_2 \dots x_N}$$

Ищем не точное, а

ε -приближённое решение $\hat{x}$, т.ч.

Чем ближе в процессе итеративных методов находимся

$k(x)$ мы подходим к $\bar{0}$ (что эквив. реш. $P x = 0$), тем сильнее растёт знаменатель

$$k(\hat{x}) \leq \frac{1}{3(\Delta(\hat{P}))^N}$$

Этот метод внутр. точек: не перебирает условия

потом округляет за полином

матрица u

Он сравнит с симп-методом, но не имеет его теор. обоснования — он полиномиален

$\hat{P} y = \hat{q} \in \text{СЛАУ}$
в матрицу y которую мы берём K раз

Этот метод используется сейчас для решения ЛП.

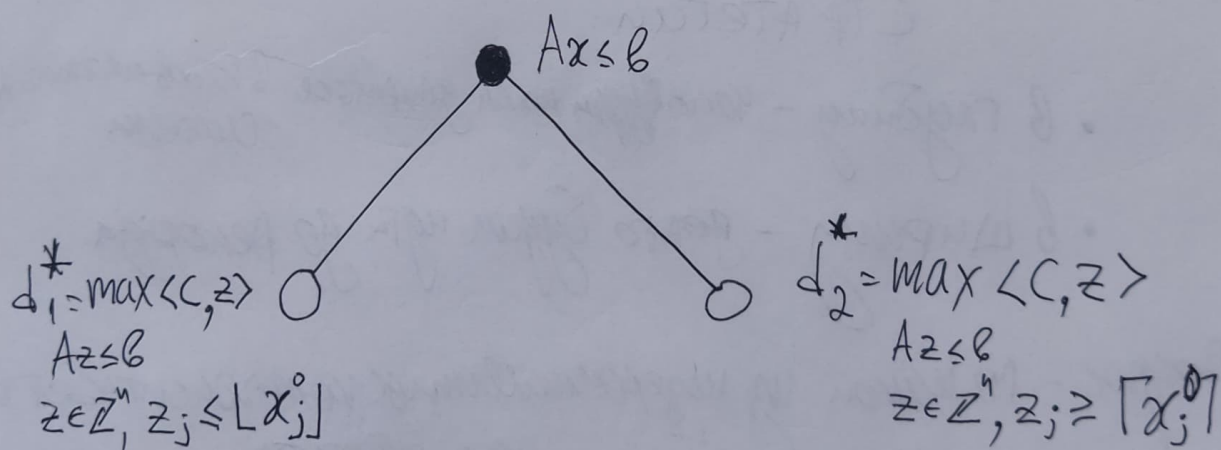
15.2. МБГ для ЦЛП. Различные стратегия метода.

Рассматривается задача ЦЛП:

$$d^* = \max \langle C, x \rangle, \\ z \in \mathbb{Z}^n: Ax \leq b$$

Решением которой является вектор $z^* \in \mathbb{Z}^n$

В корневой вершине решается оЗЛП $\max \langle C, x \rangle$,
 $x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b$



Если x^0 - целочислен $\rightarrow z := x^0$. Иначе $\xrightarrow{\text{осуществлен}}$ ветвление по j -той компоненте
 $\hookrightarrow \exists j: x_j \notin \mathbb{Z}$.

$$d^* = \max(d_1^*, d_2^*)$$

Вычисляем x^k - решение ЛП, соотв. вершине k . Если целочисленное, пробуем обновить рекорд. Закрываем все вершины с опт. значением меньше рекорда, т.к. $\max_{z \in \mathbb{Z}^n} \dots \leq \max_{x \in \mathbb{R}^n} \dots$

Если X^k не явл. улучшенным, $\exists i: X_i^k \notin Z$, вернем по
крит.

Если M неразрешима, то соотв $\subset M$ тоже $\Rightarrow$
закрываем вершину

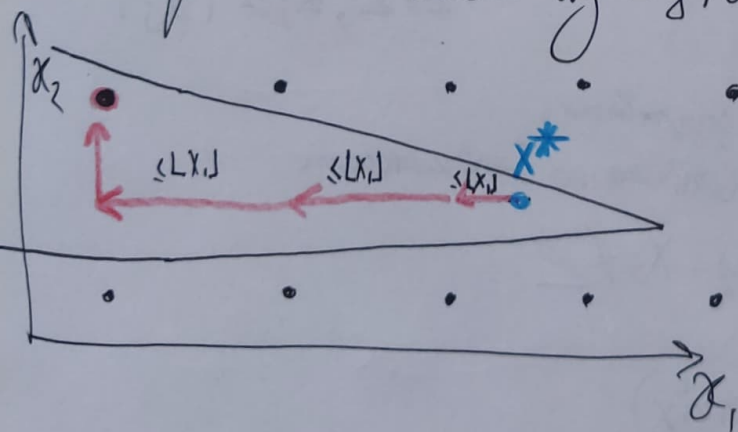
Важная стратегия ветвления. Пока мы не

установим хоть какой-то рекорд, получив улучшенное решение
 MP , мы не сможем эффективно отсеять ветви.

СТРАТЕГИИ:

- в глубину - часто ~~можно~~ упираться в несовместность системы
- в ширину - долго будем идти до рекорда

+ Вопрос - по какой из неучтенных компонент ветвить:



- если округлять
- по X_2 , не получим ничего
- если по X_1 - получим.

14.2. Углуб. МРГ. МРГ гра БЛП.

Рассматривается задача БЛП:

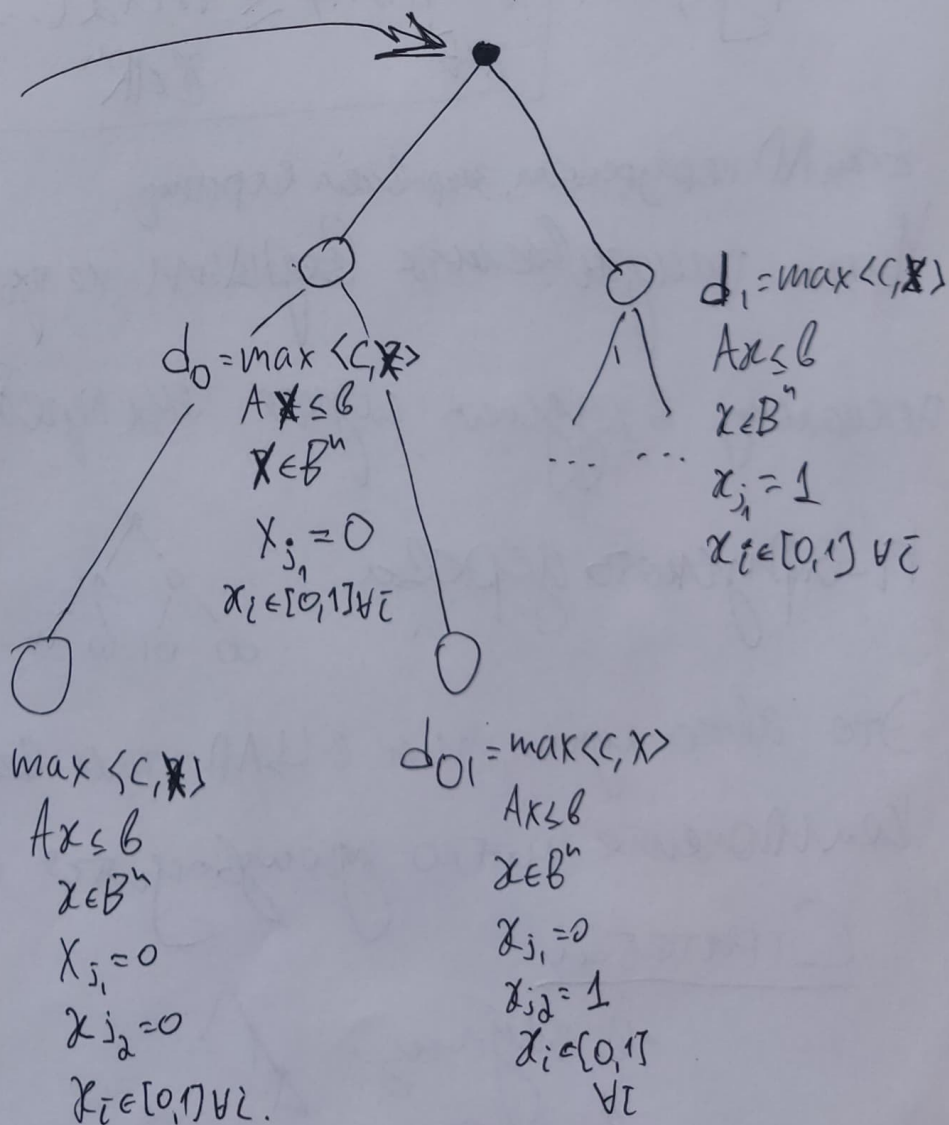
$$d^* = \max \langle C, x \rangle, \\ x \in B^n: Ax \leq b$$

решением которой является вектор $x^* \in B^n$.

В первой вершине решается ^{core}ОЗЛП без ограничений $x \in B^n$:

$$d = \max \langle C, x \rangle \\ x \in R^n: Ax \leq b.$$

$\{j_1, j_2, \dots\}$



Если x^i - члн, закрываем ветвь, иначе снова рекурр. (39)

$$d^{\dots} = \max(d^{\dots 0}, d^{\dots 1})$$

← шаг, x^{1011}

В каждой вершине вычисляем $X^{\dots}$ — решение ЛП, соответствующее БЛП (убираем только ограничение $x \in B^n$).

остаем $x_i \in [0, 1]$

Закрываем все вершины с опт. значением меньше

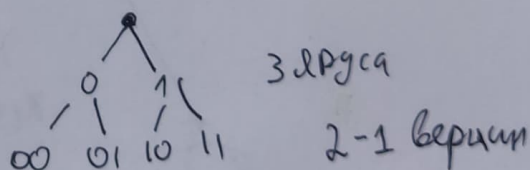
рекорда, т.к. $\max_{x \in B^n}(\dots) \leq \max_{x \in R^n}(\dots)$

Если ЛП неразрешима, закрываем вершину.

Число расширяемых вершин не превышает 2^{n+1} ,

поэтому в худшем случае мы переберем все вершины

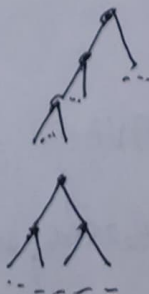
n -ярусного дерева



Это явно лучше, чем в ЦЛП: там ветвление по одной компоненте может происходить мн-во раз.

Стратегии

- в глубину
- в ширину



12.2. Теорема оптимальности для РАЗЛОЖИМЫХ ФУНКЦИЙ.

Опр. Ф-я f и-я разделимой на f_1 и f_2 , если она представлена в виде $f(x, y) = f_1(x, f_2(y))$. $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$

Опр. Ф-я f и-я разложимой на f_1 и f_2 , если она разделима на f_1 и f_2 и Ф-я f_1 монотонно не убывает по последней Арг-
 $f_1(x, t) \nearrow$ по $t \in \mathbb{R}$.

Теорема Принцип оптимальности для РАЗЛОЖИМЫХ Ф-й.

Пусть f разложима на f_1 и f_2 . Тогда

$$\min_{(x, y)} f(x, y) = \min_x f_1(x, \min_y f_2(y))$$

$$\max_{(x, y)} f(x, y) = \max_x f_1(x, \max_y f_2(y))$$

► Докажем для $\min$, для $\max$ Аналогично. Имеем $f(x, y) = f_1(x, f_2(y))$
сначала $\leq$:
По ОПР-ю минимум $\min_{(x, y)} f(x, y) = \min_{(x, y)} f_1(x, f_2(y)) \leq f_1(x^0, f_2(y^0))$
 $\forall x^0, y^0$

Положим $y^0 := \arg \min_y f_2(y)$, $x^0 = \arg \min_x f_1(x, f_2(y^0))$.

теперь $\Rightarrow$: Т.к. f_1 не убывает по последнему аргументу,

$$\text{то } f_1(x', \min_y f_2(y)) \leq f_1(x', y') \quad \forall x', y'$$

Значит точка $y' = \arg \min_y f_1(x', f_2(y))$

$$x' = \arg \min_x (\min_y f_1(x, f_2(y)))$$

$\Downarrow$ некоторый min

$$\min_{x, y} f_1(x, f_2(y)) \rightarrow \text{логично } \geq$$

Этой
Вариант теоремы для задачи условной минимизации:

$$\min_{(x, y) \in \Omega} f(x, y) = \min_{x: Y(x) \neq \emptyset} f_1(x, \min_{y \in Y(x)} f_2(y)),$$

$$\text{где } Y(x) = \{y \mid (x, y) \in \Omega\}$$

используется
где

нормальные
размерности

20.2. Прямление метода ДП для поиска размерности разложимой оптимизационной задачи.

Рассмотрим задачу оптимизации, записанную в виде

$$\begin{cases} f^* = \min f(x, y) \\ \text{связь-} \\ \text{функция} \quad g(x, y) \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^m \\ x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \\ y \in Y \subseteq \mathbb{R}^k \end{cases} \quad (*)$$

g определяет состояние системы.
Оно характеризуется параметрами x, y .

где $\mathcal{E}$ — т.н. множество терминальных состояний

Пример. Если ограничение задачи неравенствами $g_i \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$, то

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}_-^m = \mathbb{R}^m \setminus (\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}).$$

Пусть f разложима, а g разделима: $f(x, y) = f_1(x, f_2(y))$,
 $f(x, \epsilon) \nearrow_{\epsilon \rightarrow 0+}$.

$$g(x, y) = h_2(y, h_1(x)) \quad h_1, h_2 \text{ — л-ют функциями перехода.}$$

$$h_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$h_2: \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

введём состояние системы:

$$E = h_1(x)$$

$$E' = h_2(y, E) = g(x, y)$$

Множество всех возможных состояний системы обозначается как Σ , формально оно задается так:

$$1) \Sigma \supset h_1(X) = \{h_1(x) \mid x \in X\}.$$

$$2) \forall E \in h_1(X):$$

$$\Sigma \supset \{h_2(y, E) \mid y \in Y(X)\}$$

$\hookrightarrow \bigcup_{y \in Y} Y(x)$

Рассмотрим для (*) семейство задач поиска, которое нужно решать $\forall E \in \Sigma$:

$$F_2(E) = \min_{y: h_2(y, E) \in \Sigma} f_2(y).$$

По теореме оптимальности

$$f^* = \min_{x \in X} f_1(x, F_2(h_1(x)))$$

В результате задачи (*) сводятся к решению $|E|+1$ оптимизационных задач меньшей размерности. Данная процедура лежит в основе метода АП. Она применяется рекурсивно к задаче (*), где сводим к семейству одномерных задач следующего вида:

$$F^* = \min_{g(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma \subseteq \mathbb{R}^m} f(x_1, \dots, x_n).$$

$x_i \in X_i$

Пусть f последовательно разложима, т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \hat{f}_2(x_2, \dots, x_n)), \\ \hat{f}_2(x_2, \dots, x_n) = f_2(x_2, \hat{f}_3(x_3, \dots, x_n)), \\ \dots \dots \dots \\ \hat{f}_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = f_{n-1}(x_{n-1}, f_n(x_n)), \end{array} \right. \quad f_i, \hat{f}_i \in \mathbb{R}^1$$

и все f_i монотонно не убывает по 2-му аргументу.

Пусть g последовательно разложима, т.е.

$$\exists E \subset \mathbb{R}^m,$$

$\exists$ ф-ии перехода $h_1, \dots, h_n$:

$$\forall x \in X = \otimes X_i \mapsto$$

состояние после Реализации
всех $n-1$ подзаданий

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = h_n(x_n, E_{n-1}) \\ E_{n-1} = h_{n-1}(x_{n-1}, E_{n-2}) \\ \dots \dots \dots \\ E_2 = h_2(x_2, E_1) \\ E_1 = h_1(x_1) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} E_i \in E \\ \forall i = \overline{1, n-1} \end{array}$$

Определим $\forall i = \overline{2, n-1} \forall E \in \mathcal{E}$ ф-ю $\hat{h}_i(x_i, \dots, x_n, E)$, определяя по рекуррентным равенствам:

$$\begin{cases} E'_i = h_i(x_i, E) \\ E'_{i+1} = h_{i+1}(x_{i+1}, E'_i) \\ \dots \\ E'_n = h_n(x_n, E'_{n-1}) =: \hat{h}_i(x_i, \dots, x_n, E). \end{cases}$$

Можно записать так:

$$\hat{h}_i(x_i, \dots, x_n, E) := h_n(x_n, h_{n-1}(x_{n-1}, h_{n-2}(x_{n-2}, \dots, h_{i+1}(x_{i+1}, h_i(x_i, E)) \dots)))$$

$$E \text{ см } E := E_{i-1} \Rightarrow \hat{h}_i(x_i, \dots, x_n, E_{i-1}) = g(x)$$

Следствие $\hat{h}_i$
можно определить
переход от
 $i+1$ шага
к i -тому

То, что нужно к h_i —

ф-я, зависящая
от параметров

состояния в $i+1$, вост. из
параметров из i -го,
будущих вост. E .

$$\hat{h}_i(x_i, \dots, x_n, E) = \hat{h}_{i+1}(x_{i+1}, \dots, x_n, \overbrace{h_i(x_i, E)}^{\text{ф-я перехода от } i \text{ к } i+1})$$

ф-я перехода от i к $i+1$

Тогда

последовательности
из точек множества f и разложения g

$$F := \min_{g(x_1, \dots, x_n) \in E_T \subseteq \mathbb{R}^m} f(x_1, \dots, x_n) = \min_{x \in X: \hat{h}_2(x_2, \dots, x_n, h_1(x_1)) \in E_T} f_1(x_1, \hat{f}_2(x_2, \dots, x_n)) =$$

$$= \min_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, F_2(h_1(x_1)))$$

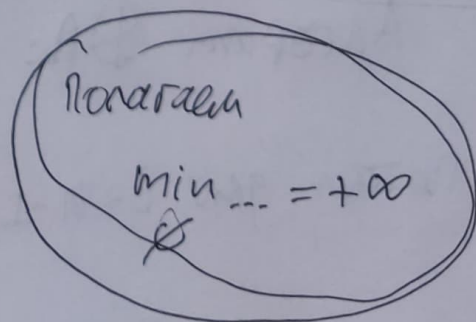
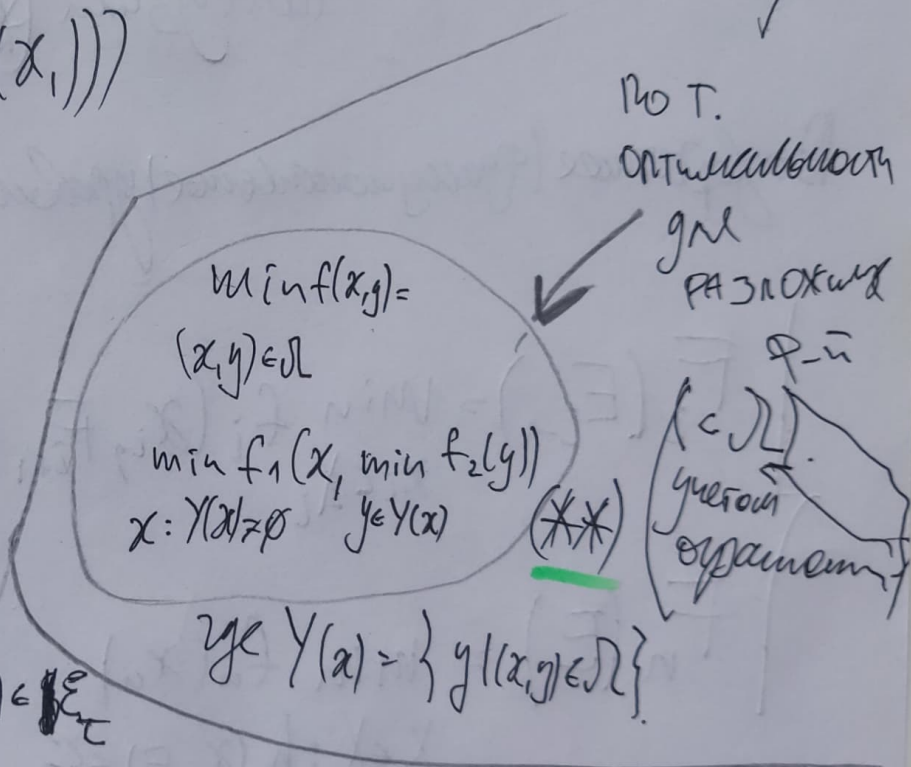
Определим F_2 :
 $\forall E_1 \in \mathcal{E}$

$$F_2(E_1) = \min_{(x_2, \dots, x_n) : \hat{h}_2(x_2, \dots, x_n, h_1(x_1)) \in E_1} \hat{f}_2(x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \min_{(x_2, \dots, x_n) : \hat{h}_3(x_3, \dots, x_n, h_2(x_2, E_1))} \hat{f}_3(x_3, \dots, x_n) =$$

$$= \min_{x_2 \in X_2} f_2(x_2, F_3(h_2(x_2, E_1)))$$

из $(x_1) \subset X = X_2$
 $y = (x_3, \dots, x_n)$



Итак, имеем
Алгоритм
для расчета
 i

$$F_i := \min_{\hat{f}_i(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)} \hat{f}_i(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad \forall i, E$$

$$h_i(x_i, \dots, x_n, E) \in \Sigma_\tau$$

— семейство задач, в которых
потребуются (*).

Возвращаемое (функциональное) уравнение ДП $\forall i = \overline{2, n-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i(E_{i-1}) = \min_{x_i \in X_i} f_i(x_i, F_{i+1}(h_i(x_i, E_{i-1}))) \quad \forall E_{i-1} \in \Sigma \\ F_n(E) = \min_{x_n \in X_n: h_n(x_n, E) \in \Sigma_\tau} f_n(x_n) \end{array} \right.$$

Алгоритм ДП: $\forall E \in \Sigma$ вычисляем $F_n(E)$,

потом где $i = n-1, \dots, 2$ определяем $F_i(E)$

Число задач будет порядка $n|\Sigma|$.

— число
состояний.

1. Метод ДП для БЛП с неотрицательными коэффициентами.
2.

Задача БЛП₊:

$$F^* = \max_{z \in B: Az \leq b} \langle c, z \rangle,$$

всё j -той элемент
по разнице "КАРМАНА"

где $a_{ij}, b_j, c_j \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $\bar{a}_j$ j -й столбец матрицы A . Рассмотрим семейство задач поиска

$$F_k(E) := \max_{\substack{z: \{z_j \in \{0,1\} \mid j=k \dots n\} \\ \sum_{j=k}^n \bar{a}_j z_j \leq b - E}} \sum_{j=k}^n c_j z_j,$$

$$k = \overline{1, n}.$$

$$Ax \leq b.$$

$$\text{где } E \in \mathcal{E} = \{E \in \mathbb{Z}_+^m \mid E_i \leq b_i \quad \forall i = \overline{1, m}\}$$

Ищем $F^* = F_1(\bar{0})$. Возвратное уравнение:

$$\begin{cases} F_k(E) = \max \{ F_{k+1}(E), c_k + F_{k+1}(E + \bar{a}_k) \} \\ F_n(E) = \begin{cases} c_n, & E \leq b - \bar{a}_n \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \end{cases}$$

берём последнего
элемент
или нет
всех почти НАБЛИЖАЮЩИХСЯ
Решение

44

Находим $\forall E \in \mathcal{E} \quad F_n(E)$ и соответствующие $X_n(E)$,
 затем где $k = n-1, \dots, 2$ находим $F_k(E)$ и
 соотв $X_k(E)$

из возмратного управления.

Вычислим $F_1(0), x_1(0)$, далее $X_2(E^1), \dots, X_n(E^{n-1})$

Вз-ти от того, какие состояния $E^1, \dots, E^{n-1}$ сумм

в конечном счете используются при вычислении $F_1(0)$, если
 учитывать все ЛАГ и Алгоритма.

Число ЛАГов равно n , на ВЛАГЕ рассматривается
 $\min \{(b_1+1) \cdot \dots \cdot (b_n+1), 2^{n-1}\}$ состояний, на $(n-1)$ -ом -
 $\min$ из $|\mathcal{E}|$ и 2^{n-2} и т.д. При поисках в сетог ДН
 решает примерно столько же задач, сколько МРБ в худшем
 случае, но решает эти задачи лучше: $\min$ vs ЛП.

